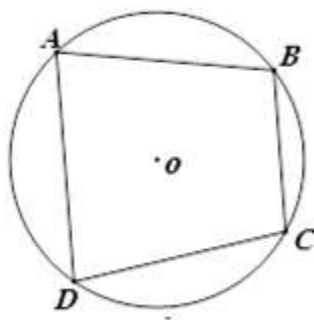


Tứ giác nội tiếp

I. Lý thuyết

1. Định nghĩa

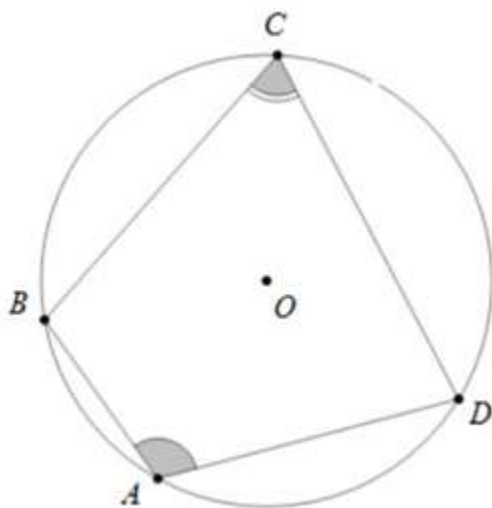
- Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn.



Trong hình vẽ trên, ta nói: Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) và đường tròn (O) ngoại tiếp tứ giác ABCD.

2. Định lý

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° .
- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.



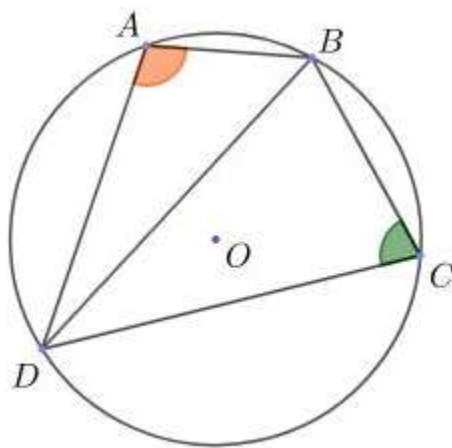
Xét hình vẽ:

- Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) $\Rightarrow A + C = 180^\circ$ hoặc $B + D = 180^\circ$

- Tứ giác ABCD có $A + C = 180^\circ$ hoặc $B + D = 180^\circ$ thì tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn.

3. Một số dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp

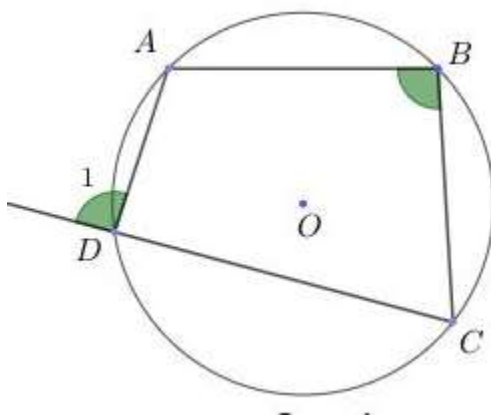
- Tứ giác có tổng các góc đối bằng 180° là tứ giác nội tiếp.



Xét hình vẽ:

Nếu $A + C = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn hay tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp.

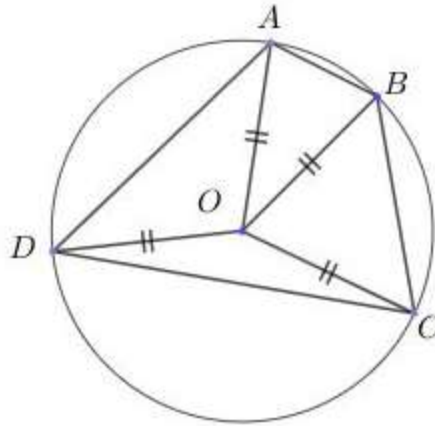
- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của một đỉnh đối diện là tứ giác nội tiếp.



Xét hình vẽ:

Nếu $D_1 = B \Rightarrow$ Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn hay tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp.

- Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm cố định (mà ta xác định được) là tứ giác nội tiếp, điểm cách đều đó là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác.

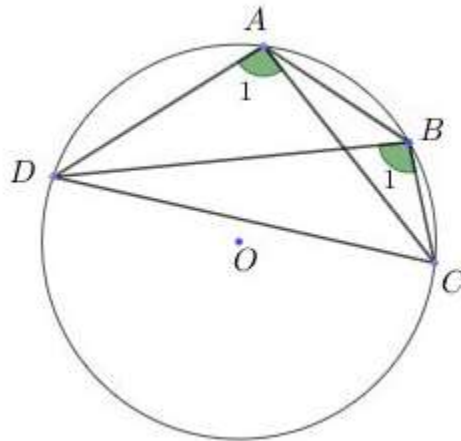


Xét hình vẽ:

Nếu $OA = OB = OC = OD \Rightarrow$ Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) hay tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp.

Điểm O chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh dưới một góc α không đổi là tứ giác nội tiếp.



Xét hình vẽ:

Nếu $\angle DAC = \angle DBC \Rightarrow$ Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn hay ABCD là tứ giác nội tiếp.

II. Dạng bài tập

Dạng 1: Chứng minh tứ giác nội tiếp

Phương pháp giải: Để chứng minh tứ giác nội tiếp ta có thể dùng một trong bốn dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp.

Cách 1: Chứng minh tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180° .

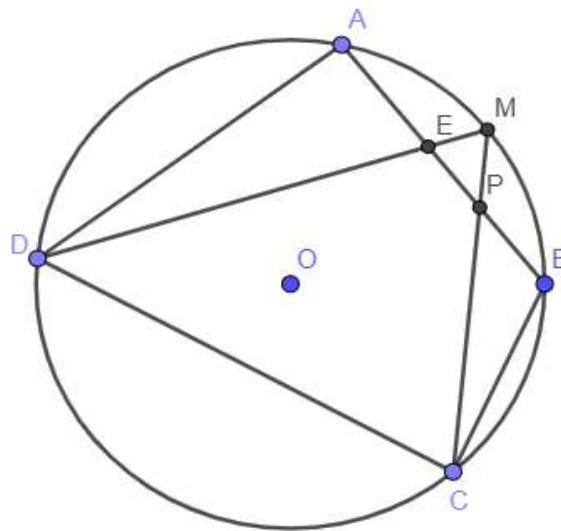
Cách 2: Chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cùng các đều 1 điểm.

Cách 3: Chứng minh hai góc có đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh đó một góc không đổi.

Cách 4: Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.

Ví dụ 1: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). M là điểm chính giữa cung AB. Nối M với D, M với C cắt AB lần lượt ở E và F. Chứng minh tứ giác PEDC là tứ giác nội tiếp.

Lời giải:



Ta có:

MDC là góc nội tiếp chắn cung MC

$$\Rightarrow \angle MDC = \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{MC} \text{ (định lý)}$$

Mà $\angle MDC = \angle MFC$

$$\text{Nên} \Rightarrow \text{MDC} = \frac{1}{2} (\text{sđ MB} + \text{sđ BC}) \quad (1)$$

Lại có CPB là góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn

$$\Rightarrow \text{CPB} = \frac{1}{2} (\text{sđ BC} + \text{sđ MA}) \quad (2)$$

Lại có M là điểm chính giữa cung AB

$$\text{sđ MA} = \text{sđ MB} \quad (\text{định lý}) \quad (3)$$

$$\text{Từ (1); (2); (3)} \Rightarrow \text{CPB} = \text{MDC}$$

Xét tứ giác PEDC có:

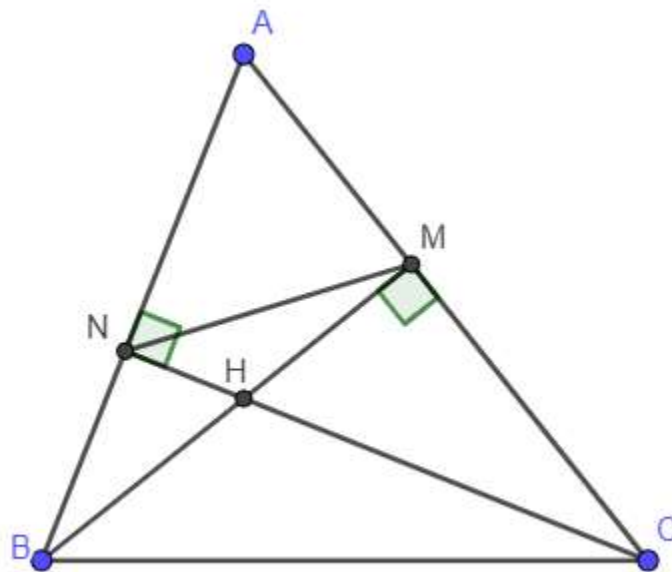
$$\text{CPB} = \text{MDC}$$

Mà góc CPB là góc ngoài của đỉnh P và đỉnh P và D là hai đỉnh đối diện nhau

Do đó: tứ giác PEDC là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BM và CN cắt nhau tại H. Chứng minh các tứ giác AMHN và BNMC là những tứ giác nội tiếp.

Lời giải:



Vì BM là đường cao của tam giác ABC nên $\angle AMB = \angle BMC = 90^\circ$

Vì CN là đường cao của tam giác ABC nên $\angle ANC = \angle BNC = 90^\circ$

Xét tứ giác AMHN có:

$$\angle AMB + \angle ANC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Mà góc $\angle AMB$ và $\angle ANC$ là hai góc đối nhau

Do đó tứ giác AMHN là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).

Xét tứ giác BNMC có:

$$\angle BMC = \angle BNC = 90^\circ$$

Mà hai góc này là hai góc có đỉnh kề nhau và cùng nhìn cạnh BC dưới một góc 90°

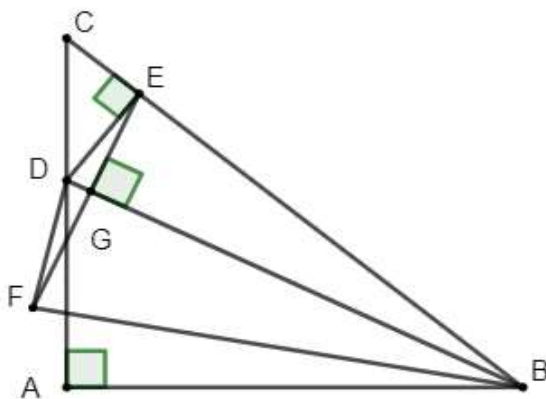
Do đó tứ giác BNMC là tứ giác nội tiếp.

Dạng 2: Chứng minh nhiều điểm thuộc cùng một đường tròn

Phương pháp giải: Ta chia các điểm đó thành các tứ giác, tam giác sau đó chứng minh cho các tứ giác, tam giác đó cùng nội tiếp một đường tròn.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên AC lấy điểm D. Hình chiếu của D lên BC là E, điểm đối xứng của E qua BD là F. Chứng minh 5 điểm A, B, E, D, F cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

Lời giải:



Vì E là hình chiếu của D lên BC nên $DE \perp BC \Rightarrow \angle DEB = 90^\circ$

Gọi O là trung điểm của BD.

Xét tam giác DEB vuông tại E, trung tuyến EO ta có:

$OE = OD = OB = \frac{1}{2}BD$ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông) (1)

Xét tam giác ABD vuông tại A, trung tuyến AO ta có:

$AO = OD = OB = \frac{1}{2}BD$ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông) (1)

Vì E đối xứng với F qua BD nên $EF \perp BD$. Gọi giao điểm của EF với BD là G.

Vì E đối xứng với F qua BD nên $EG = GF$.

Xét tam giác DGF và tam giác DGE có:

$$GF = GE$$

DG chung

$$\angle DGF = \angle DGE = 90^\circ$$

Do đó $\triangle DGF = \triangle DGE$ (c - g - c)

$$\Rightarrow \begin{cases} DF = DE \\ \angle FDG = \angle EDG \end{cases} \text{ (các cặp cạnh tương ứng và các cặp góc tương ứng)}$$

Xét FDB và tam giác EDB có:

BD chung

$$DF = DE \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\angle FDG = \angle EDG \text{ (chứng minh trên)}$$

Do đó $\triangle FDB = \triangle EDB$ (c - g - c)

$$\Rightarrow \angle DFB = \angle DEB = 90^\circ$$

Xét tam giác FDB vuông tại F, trung tuyến FO ta có:

$FO = OD = OB = \frac{1}{2}BD$ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông) (3)

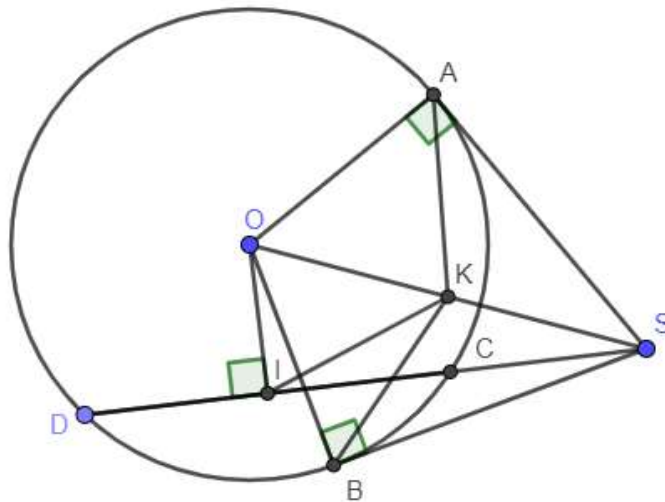
Từ (1); (2); (3) ta có:

$$OA = OB = OD = OE = OF = \frac{1}{2}BC$$

Do đó 5 điểm A, B, D, E, F cách đều O. Do đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp đi qua 5 điểm A, B, D, E, F.

Ví dụ 2: Từ điểm S nằm ở ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến SA; SB với A, B là tiếp điểm và cát tuyến SCD với đường tròn. Gọi I là trung điểm của CD. Chứng minh 5 điểm A, I, O, B, S cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải:



Vì SA là tiếp tuyến của đường tròn, A là tiếp điểm nên SA vuông góc với OA.

$$\Rightarrow \angle SAO = 90^\circ$$

Vì SB là tiếp tuyến của đường tròn, B là tiếp điểm nên SB vuông góc với OB.

$$\Rightarrow \angle SBO = 90^\circ$$

Vì I là trung điểm của CD nên OI vuông góc với CD (tính chất)

$$\Rightarrow \angle SOI = 90^\circ$$

Gọi trung điểm của SO là K.

Tam giác OAS vuông tại A với K là trung điểm của SO

$$\Rightarrow OK = KS = AK = \frac{1}{2}SO \text{ (định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)} \quad (1)$$

Tam giác OBS vuông tại B với K là trung điểm của SO

$$\Rightarrow OK = KS = BK = \frac{1}{2}SO \text{ (định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)} \quad (2)$$

Tam giác OIS vuông tại I có K là trung điểm của SO

$$\Rightarrow OK = KS = IK = \frac{1}{2}SO \text{ (định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1); (2); (3)} \Rightarrow OK = KS = IK = AK = BK = \frac{1}{2}SO$$

Hay 5 điểm A, B, S, I, O cách đều điểm K.

Vậy 5 điểm A, B, S, I, O cùng nằm trên một đường tròn (K) bán kính KS.

Dạng 3: Sử dụng tứ giác nội tiếp để chứng minh các góc bằng nhau, các đoạn thẳng bằng nhau, các đường thẳng song song, vuông góc...

Phương pháp giải: Sử dụng các tính chất của tứ giác nội tiếp.

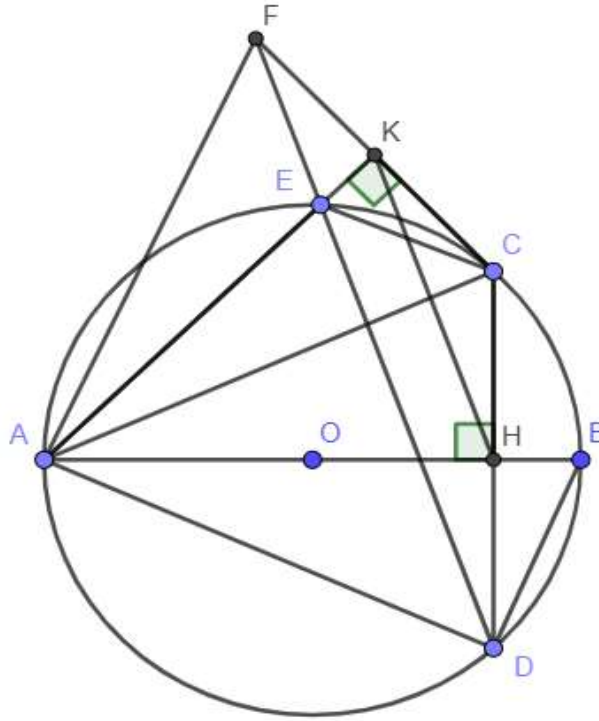
Ví dụ 1: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi H là điểm nằm giữa O và B. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Trên cung nhỏ AC lấy điểm E, kẻ CK vuông góc với AE tại K. Đường thẳng DE cắt CK tại F. Chứng minh:

a) Tứ giác AHCK là tứ giác nội tiếp.

b) $AH \cdot AB = AD^2$.

c) Tam giác ACF là tam giác cân.

Lời giải:



a) Vì CD vuông góc với AB tại $H \Rightarrow \angle CHA = 90^\circ$

Vì CK vuông góc với AE tại $K \Rightarrow \angle AKC = 90^\circ$

Xét tứ giác $AKCH$ có:

$$\angle AKC + \angle CHA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

Do đó tứ giác $AKCH$ là tứ giác nội tiếp.

b) Vì AB là đường kính do đó $\angle ADB$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$$\Rightarrow \angle ADB = 90^\circ$$

Xét tam giác ABD vuông tại D , đường cao DH ta có:

$$AH \cdot AB = AD^2 \text{ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)}$$

c) Vì $AHCK$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \angle KHC = \angle KAC \text{ (hai góc có đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh KC)}$$

Lại có $\angle KAC = \angle EDC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EC)

Do đó: $\angle EDC = \angle KHC$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị với nhau

Do đó $KH \parallel DF$

Mặt khác AB vuông góc với CD tại H nên H là trung điểm của CD (tính chất)

Vì H là trung điểm của CD , $KH \parallel DF$ do đó K là trung điểm của CF (tính chất)

Xét tam giác ACF có:

AK vuông góc với CF

K là trung điểm của CF

Do đó AK vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của tam giác ACF

$\Rightarrow$ Tam giác ACF là tam giác cân tại A .

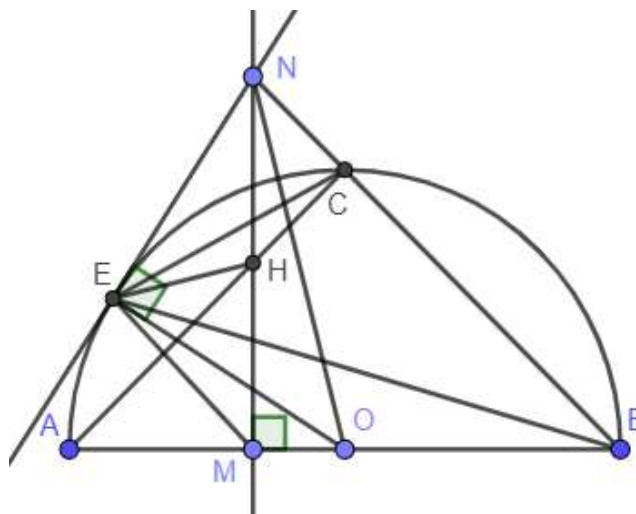
Ví dụ 2: Cho nửa (O) đường kính AB . Lấy M thuộc OA (M không trùng với O và A). Qua M kẻ đường thẳng d vuông góc với AB . Trên d lấy N sao cho $ON > R$. Nối NB cắt (O) tại C . Kẻ tiếp tuyến NE với (O) (E là tiếp điểm, A và E thuộc cùng nửa mặt phẳng bờ d). Chứng minh:

a) Tứ giác O, E, M, N thuộc cùng một đường tròn.

b) $NE^2 = NC \cdot NB$

c) $\angle NEH = \angle NME$ (H là giao điểm của AC và d).

Lời giải:



a) Vì NE là tiếp tuyến (O) nên OE vuông góc với EN

$$\Rightarrow \text{OEN} = 90^\circ$$

Vì MN vuông góc với AB nên $\text{NMO} = 90^\circ$

Xét tứ giác ENOM có:

$$\text{OEN} = \text{NMO} = 90^\circ$$

Mà hai góc này có đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh ON

Do đó tứ giác ENOM là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ bốn điểm E, N, O, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có: NBE là góc nội tiếp chắn cung NC

NEC là góc nội tiếp chắn cung NC

Do đó $\text{NBE} = \text{NEC}$

Xét tam giác NEC và tam giác NBE có:

N chung

$$\text{NEC} = \text{NBE}$$

Do đó: $\triangle \text{NEC} \sim \triangle \text{NBE}$ (g – g)

$$\Rightarrow \frac{\text{NE}}{\text{NB}} = \frac{\text{NC}}{\text{NE}} \text{ (hai cặp cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Hay } \text{NE}^2 = \text{NB} \cdot \text{NC}$$

c) Vì ACB là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow \text{ACB} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \text{NCH} = 90^\circ$$

Xét tam giác HCN và tam giác BMN có:

$$\text{NCH} = \text{NMB} = 90^\circ$$

N chung

Do đó $\triangle \text{HCN} \sim \triangle \text{BMN}$ (g – g)

$$\Rightarrow \frac{NC}{NM} = \frac{NH}{NB} \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow NC.NB = NM.NH$$

Theo câu b ta có: $NC.NB = NE^2$

$$\text{Do đó: } NE^2 = NM.NH$$

$$\Rightarrow \frac{NE}{NM} = \frac{NH}{NE}$$

Xét hai tam giác NEH và tam giác NME có:

N chung

$$\frac{NE}{NM} = \frac{NH}{NE}$$

Do đó $\triangle NEH \sim \triangle NME$ (c - g - c)

$$\Rightarrow \angle NEH = \angle NME \text{ (hai góc tương ứng).}$$

III. Bài tập vận dụng

Bài 1: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Kẻ đường kính AC của đường tròn (O) cắt (O') tại F. Kẻ đường kính AE của (O') cắt đường tròn (O) tại G. Chứng minh:

a) Tứ giác GFEC nội tiếp;

b) GC, FE, AB đồng quy.

Bài 2: Cho điểm C nằm trên nửa đường tròn (O) với đường kính AB sao cho cung AC lớn hơn cung BC ($B \neq C$). Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt dây AC tại D. Chứng minh tứ giác BCDO nội tiếp.

Bài 3: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kỳ (H không trùng O, B). Trên đường thẳng vuông góc với OB tại H, lấy một điểm M ở ngoài đường tròn; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) ở C và D. Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh các tứ giác MCID và MCHB là tứ giác nội tiếp.

Bài 4: Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O), qua A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Chứng minh tứ giác ABOC là tứ giác nội tiếp.

Bài 5: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là điểm thuộc đường tròn. Vẽ MH vuông góc với BC tại H, vẽ MI vuông góc với AC. Chứng minh MIHC là tứ giác nội tiếp.

Bài 6: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi I là trung điểm của OA, dây CD vuông góc với AB tại I. Lấy K tùy ý trên cung BC nhỏ, AK cắt CD tại H.

- a) Chứng minh: Tứ giác BIHK là tứ giác nội tiếp.
- b) Chứng minh: AH.AK có giá trị không đổi khi K di chuyển trên cung nhỏ BC.
- c) Kẻ DN vuông góc với CB, DM vuông góc với AC. Chứng minh đường thẳng MN, AB, CD đồng quy.

Bài 7: Cho tam giác ABC cân tại A. Đường thẳng xy song song với BC cắt AB tại E và cắt AC tại F. Chứng minh tứ giác EFCB nội tiếp.

Bài 8: Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn (O; R) có đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F và E; BE cắt CF tại H.

- a) Chứng minh tứ giác AFHE nội tiếp. Từ đó, xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác này.
- b) Tia AH cắt BC tại D. Chứng minh $HE.HB = 2HD.HI$
- c) Chứng minh bốn điểm D, E, I, F cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 9: Cho tam giác ABC vuông tại A và điểm M thuộc cạnh AC. Vẽ đường tròn tâm O đường kính MC cắt BC tại E. Nối BM cắt đường tròn (O) tại N, AN cắt đường tròn (O) tại D. Lấy I đối xứng với M qua A, K đối xứng với M qua E.

- a) Chứng minh BANC là tứ giác nội tiếp.
- b) Chứng minh CA là phân giác của BCD.
- c) Chứng minh ABED là hình thang.

Bài 10: Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định ngoài đường tròn. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN tới đường tròn (M, N là hai tiếp điểm). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O; R) tại B và C ($AB < AC$). Gọi I là trung điểm của BC.

- a) Chứng minh năm điểm A, M, N, O, I thuộc cùng một đường tròn.
- b) Chứng minh: $AM^2 = AB.AC$.

c) Đường thẳng qua B, song song với AM cắt MN tại E. Chứng minh IE song song với MC.

d) Chứng minh khi d di chuyển quanh điểm A thì trọng tâm G của tam giác MBC luôn nằm cố định trên một đường thẳng.

Bài 11: Cho đường tròn (O; R) và dây CD cố định. Điểm M thuộc tia đối của tia CD. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB tới đường tròn, A, B là các tiếp điểm (A thuộc cung lớn CD). Gọi I là trung điểm của CD. Nối BI cắt đường tròn tại E (E khác B). Nối OM cắt AB tại H.

a) Chứng minh: $AE \parallel CD$.

b) Tìm vị trí của M để AM vuông góc với MB.

Bài 12: Cho đường tròn (O; R), hai điểm C, D thuộc đường tròn, B là điểm chính giữa của cung nhỏ CD. Kẻ đường kính BA; trên tia đối của tia AB lấy điểm S. Nối S với C cắt (O) tại M, MD cắt AB tại K, MB cắt AC tại H. Chứng minh:

a) Tứ giác AMHK nội tiếp

b) $HK \parallel CD$.

Bài 13: Cho hình vuông ABCD. E di động trên đoạn CD (E khác C, D). Tia AE cắt đường thẳng BC tại F, Ax vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng DC tại K. Chứng minh:

a) $CAF = CKF$

b) Tam giác KAF vuông cân.

c) Đường thẳng BD đi qua trung điểm I của KF.

d) Tứ giác IMCF nội tiếp với M là giao điểm của BD và AE.

Bài 14: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), M là điểm thuộc cung nhỏ AC. Vẽ MH vuông góc với BC tại H, MI vuông góc với AC tại I.

a) Chứng minh: $IHM = ICM$.

b) Đường thẳng HI cắt đường thẳng AB tại K. Chứng minh MK vuông góc với BK.

c) Chứng minh tam giác MIH đồng dạng với tam giác MAB.

d) Gọi E là trung điểm của IH và F là trung điểm của AB. Chứng minh tứ giác KMEF nội tiếp từ đó suy ra ME vuông góc với EF.