

TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI
NHÓM TOÁN 9



TÀI LIỆU HỌC TẬP
TOÁN 9



Tập 1

Học sinh:

Lớp:

2025 - 2026
Tài liệu lưu hành nội bộ

PHẦN
1

SỐ & ĐẠI SỐ

Chương
1

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Chủ đề 1. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

TÓM TẮT KIẾN THỨC

① Phương trình tích:

➤ **Phương pháp giải phương trình tích:** Muốn giải phương trình $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) = 0$, ta giải hai phương trình $a_1x + b_1 = 0$ và $a_2x + b_2 = 0$ rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

• **Tổng quát:** $A \cdot B = 0$

$$A = 0 \text{ hoặc } B = 0$$

VD: Giải phương trình: a) $(x-5)(2x-4)=0$ b) $3x^2 + 21x = 0$

Giải:

a) Ta có: $(x-5)(2x-4)=0$

$$x-5=0 \text{ hoặc } 2x-4=0$$

$$x=5 \quad \text{hoặc} \quad x=2$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=5$ và $x=2$

b) Ta có: $3x^2 + 21x = 0$

$$3x(x+7)=0$$

$$3x=0 \text{ hoặc } x+7=0$$

$$x=0 \quad \text{hoặc} \quad x=-7$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=0$ và $x=-7$

② Phương trình chứa ẩn ở mẫu quy về phương trình bậc nhất:

➤ Đối với phương trình chứa ẩn ở mẫu, điều kiện của ẩn sao cho các phân thức chứa trong phương trình đều xác định gọi là **điều kiện xác định của phương trình**.

▪ Nhận xét:

- Để tìm điều kiện xác định của phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta đặt điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu thức chứa trong phương trình đều khác 0.
- Những giá trị của ẩn không thỏa điều kiện xác định thì không thể là nghiệm của phương trình.

VD: Tìm điều kiện xác định của phương trình sau: $\frac{3}{3x-2} + \frac{x}{x+1} = 2$

Giải:

Ta có: $3x - 2 \neq 0$ khi $x \neq \frac{2}{3}$ và $x + 1 \neq 0$ khi $x \neq -1$.

Vậy điều kiện xác định của phương trình là: $x \neq \frac{2}{3}$ và $x \neq -1$.

➤ **Phương pháp giải phương trình chứa ẩn ở mẫu:**

- Bước 1: Tìm điều kiện xác định (ĐKXD) của phương trình.
- Bước 2: Quy đồng mẫu thức hai vế của phương trình, rồi khử mẫu.
- Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.
- Bước 4: Xét mỗi giá trị tìm được ở Bước 3, giá trị nào thỏa mã điều kiện xác định thì đó là nghiệm của phương trình đã cho.

VD: Giải phương trình: a) $\frac{x-1}{x+3} - \frac{3x+2}{x+3} = 2$ b) $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1} = \frac{2x+5}{(x-2)(x+1)}$

Giải:

a) Điều kiện xác định: $x \neq -3$

Ta có: $\frac{x-1}{x+3} - \frac{3x+2}{x+3} = 2$

$$\frac{x-1}{x+3} - \frac{3x+2}{x+3} = \frac{2(x+3)}{x+3}$$

$$x-1-3x-2=2x+6$$

$$-2x-3=2x+6$$

$$-2x-2x=6+3$$

$$-4x=9$$

$$x = -\frac{9}{4} \text{ (thỏa điều kiện xác định)}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -\frac{3}{2}$

b) Điều kiện xác định: $x \neq 2$ và $x \neq -1$.

Ta có: $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1} = \frac{2x+5}{(x-2)(x+1)}$

$$\frac{3(x+1)}{(x-2)(x+1)} + \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{2x+5}{(x-2)(x+1)}$$

$$3(x+1) + 2x(x-2) = 2x+5$$

$$3x+3+2x-4=2x+5$$

$$3x=6$$

$$x=2 \text{ (không thỏa điều kiện xác định)}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Mỗi câu sau đây đều có 4 lựa chọn, hãy khoanh tròn đáp án chính xác nhất.

Câu 1: Tất cả các nghiệm của phương trình $(x+3)(2x-6)=0$ là:

- A. $x = -3$. B. $x = 3$. C. $x = 3$ hay $x = -3$. D. $x = 2$.

Câu 2: Điều kiện xác định của phương trình $\frac{2x+3}{x-4} + 2 = \frac{1}{x-3}$ là:

- A. $x \neq 4$ B. $x \neq 3$ C. $x \neq 4$ và $x \neq 3$ D. $x = 4$ và $x = 3$.

Câu 3: Nghiệm của phương trình $\frac{x+2}{x-4} - 1 = \frac{30}{(x+3)(x-4)}$ là:

- A. $x = 2$ B. $x = -3$. C. $x = 4$ D. $x = -2$

Câu 4: Phương trình $2x^2(3x+5)=0$ có các nghiệm là:

- A. $x = \frac{-5}{3}$ và $x = 0$ B. $x = -5$ và $x = 0$ C. $x = 0$ và $x = 3$. D. $x = \frac{-3}{5}$ và $x = 0$

Câu 5: Phương trình $3x(2x-6)^2 = 0$ có các nghiệm là:

- A. $x = -6$ và $x = 0$ B. $x = 3$ và $x = 0$ C. $x = -6$ và $x = 2$. D. $x = 3$ và $x = 6$.

Câu 6: Điều kiện xác định của phương trình $\frac{2x-3}{x+1} = 3$ là:

- A. $x \neq 0$ B. $x \neq 3$ C. $x \neq -1$ D. $x \neq 1$

Câu 7: $x \neq 3$ là điều kiện xác định của phương trình:

- A. $\frac{2}{3-x} = 1$ B. $\frac{2}{3+x} = 1$ C. $\frac{4-x}{3x} = 1$ D. $\frac{2x}{1+x} = 3$

Câu 8: Phương trình $\frac{3}{x+2} = \frac{4}{x-5}$ có điều kiện xác định là

- A. $x \neq -5$ và $x \neq -2$. B. $x \neq 5$ và $x \neq -2$. C. $x \neq -5$ và $x \neq 2$. D. $x \neq 5$ và $x \neq 2$.

Câu 9: $x \neq -\frac{1}{4}$ là điều kiện xác định của phương trình:

- A. $\frac{5x}{4x-1} = 3$ B. $\frac{5}{4} = \frac{2}{x-1}$ C. $\frac{2}{4+x} = 5$ D. $\frac{-3x}{4x+1} = 2$

Câu 10: $x \neq -1$ và $x \neq 3$ là điều kiện xác định của phương trình

A. $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x+3}$

B. $\frac{5}{x-1} = \frac{2}{x-3}$

C. $\frac{5x}{x-1} = 3$

D. $\frac{3}{x+1} = \frac{2}{x-3}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1) $(x-3)(3x+2)=0$

4) $(4x-10)(24+5x)=0$

7) $(x+2)\left(\frac{x+5}{2}-\frac{3-2x}{4}\right)=0$

10) $3(x-5)(x+2)=x^2-5x$

13) $(x-3)^2=(2x+7)^2$

16) $9(2x+1)^2-4(x+1)^2=0$

19) $2(x+2)^2-x^3-8=0$

22) $(x-1)(x^2-9)=-x-3$

2) $(x^2+2024)(6x-3)=0$

5) $(x^2-9)(4-x)=0$

8) $(3-2x)\left(\frac{2x-1}{2}+\frac{x+3}{4}\right)=0$

11) $(x-1)(2x+3)+2x=2$

14) $(x-2)^2-(2x+3)^2=0$

17) $(3-2x)^2+4x^2-9=0$

20) $4(3x-2)+(2-3x)^3=0$

23) $27x^2(x+3)-12(x^2+3x)=0$

3) $2(x+4)(2x-3)=0$

6) $2x(3x-1)=(3x-1)$

9) $(4x-10)\left[\frac{4x-3}{5}-\frac{2(x+3)}{7}\right]=0$

12) $\frac{7-x}{2}+\frac{2}{3}(x-7)(x-3)=0$

15) $(x+2)(3-4x)=x^2+4x+4$

18) $(x+2)^2=9(x^2-4x+4)$

21) $(x-1)(x^2-9)=-x-3$

24) $2(9x^2+6x+1)=(3x+1)(x-2)$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

1) $\frac{x+2}{x+3}-\frac{3x}{x+3}=1$

4) $\frac{4}{x-1}-\frac{5}{x-2}=-3$

7) $1+\frac{2x-5}{x-2}-\frac{3x-5}{x-1}=0$

10) $\frac{5x}{x+1}-\frac{3}{x-1}=\frac{5(x^2+1)}{x^2-1}$

13) $\frac{5}{x+2}-\frac{x}{4-x^2}=\frac{2}{x-2}$

16) $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-1}{x+2}=\frac{2(x^2+2)}{x^2-4}$

2) $\frac{7x+7}{x-1}=\frac{2}{3}$

5) $\frac{2x+5}{2x}-\frac{x}{x+5}=0$

8) $\frac{x^2}{5x-x^2}-\frac{3}{x}=\frac{4-x}{x-5}$

11) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{6}{x+2}=\frac{x^2}{x^2-4}$

14) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{1}{x}=\frac{2}{x^2-2x}$

17) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{x-1}{x(x-2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=0$

3) $\frac{2}{1+x}=\frac{1}{3-7x}$

6) $3x-\frac{1}{x-2}=\frac{x-1}{2-x}$

9) $\frac{2x^2}{x^2-4x}+\frac{3-2x}{4-x}=\frac{5}{x}$

12) $\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}-\frac{1+3x}{1-3x}$

15) $\frac{x-1}{x-3}-\frac{2x}{x+3}=\frac{2x-3}{x^2-9}$

18) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x(x-2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=0$



TOÁN LIÊN HỆ THỰC TẾ

* Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình:

- Bước 1: Lập phương trình:
 - + Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
 - + Biểu diễn các đại lượng chưa biết khác theo ẩn và các đại lượng đã biết.
 - + Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.
- Bước 2: Giải phương trình.
- Bước 3: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

Bài 1: Một người đi xe đạp từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 50km. Sau đó 1 giờ 30 phút một xe máy cũng đi từ tỉnh A đến tỉnh B sớm hơn 1 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe? Biết rằng vận tốc xe máy gấp 2,5 vận tốc xe đạp.

Bài 2: Một ô tô phải đi quãng đường AB dài 60 km trong một thời gian nhất định. Xe đi nửa đầu quãng đường với vận tốc hơn dự định 10 km/h và đi nửa sau kém hơn dự định 6 km/h. Biết ô tô đến đúng dự định. Tính thời gian dự định đi quãng đường AB ?

Bài 3: Một xe vận tải đi từ địa điểm A đến địa điểm B với vận tốc 50 km/h, rồi từ B quay ngay về A với vận tốc 40 km/h. Cả đi và về mất một thời gian là 5 giờ 24 phút. Tìm chiều dài quãng đường từ A đến B.

Bài 4: Một người đi xe gắn máy, đi từ địa điểm A đến địa điểm B trên một quãng đường dài 35km. Lúc trở về người đó đi theo con đường khác dài 42km với vận tốc kém hơn vận tốc lượt đi là 6 km/h. Thời gian lượt về bằng $\frac{3}{2}$ thời gian lượt đi. Tìm vận tốc lượt đi và lượt về.

Bài 5: Một xe tải đi từ A đến B với vận tốc 50 km/h. Đi được 24 phút thì gặp đường xấu nên vận tốc trên quãng đường còn lại giảm còn 40 km/h. Vì vậy đã đến nơi chậm mất 18 phút. Tìm chiều dài quãng đường từ A đến B.

Bài 6: Một ô tô đi quãng đường dài 60 km trong một thời gian đã định. Ô tô đi nửa quãng đường đầu với vận tốc hơn dự định là 10 km/h và đi nửa quãng đường còn lại với vận tốc thấp hơn dự định là 6 km/h nhưng ô tô đã đến đúng thời gian đã định. Tính thời gian ô tô đã dự định đi quãng đường trên.

Bài 7: Một xí nghiệp dự định chia đều 12 600 000 đồng để thưởng cho các công nhân tham gia hội thao nhân ngày thành lập xí nghiệp. Khi đến ngày hội thao chỉ có 80% số công nhân tham gia, vì thế mỗi người tham gia hội thao được nhận thêm 105 000 đồng. Tính số công nhân dự định tham gia lúc đầu.

Chương 2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

TÓM TẮT KIẾN THỨC

I. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN – HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

① Phương trình bậc nhất hai ẩn:

➤ **Phương trình bậc nhất hai ẩn** x, y có dạng $ax + by = c$ (1) với a, b, c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$).

– Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là nghiệm của (1) nếu $(x_0; y_0)$ thỏa (1).

VD: Phương trình $2x + y = 5$ là phương trình bậc nhất hai ẩn có nghiệm là $(x; y) = (2; 1)$ vì $2.2 + 1 = 5$.

• Chú ý:

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , mỗi nghiệm của phương trình (1) được biểu diễn bởi một điểm. Nghiệm $(x_0; y_0)$ được biểu diễn bởi điểm có tọa độ $(x_0; y_0)$.
- Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn luôn có vô số nghiệm. Tất cả các nghiệm của nó được biểu diễn bởi một đường thẳng.

② Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:

➤ **Tổng quát**: Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng:

$$(I) \quad \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

- Trong đó: a, b, c, a', b', c' là các số đã biết (gọi là hệ số), a và b không đồng thời bằng 0, a' và b' không đồng thời bằng 0.
- Nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm chung của hai phương trình (1) và (2) thì $(x_0; y_0)$ là được gọi là một nghiệm của hệ (I).

VD: Cặp số $(-1; 1)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ vì: $\begin{cases} -1 + 2.1 = 1 \\ 2.(-1) + 3.1 = 1 \end{cases}$.

II. GẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

① Phương pháp thế:

➤ Các bước giải:

- Bước 1: Từ một phương trình của hệ, ta biểu diễn ẩn này theo ẩn kia, rồi thế vào phương trình còn lại của hệ để nhận được một phương trình một ẩn.
- Bước 2: Giải phương trình một ẩn đó rồi suy ra nghiệm của hệ.

VD: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ -x + 2y = -5 & (2) \end{cases}$$

Giải:

Cách 1.

Từ phương trình (1), ta có: $y = 5 - 2x$ (3)

Thay $y = 5 - 2x$ vào phương trình (2), ta

được: $-x + 2(5 - 2x) = -5$

$$-x + 10 - 4x = -5$$

$$-5x = -15$$

$$x = 3$$

Thay $x = 3$ vào phương trình (3), ta được:

$$y = 5 - 2 \cdot (3) = -1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(3; -1)$.

Cách 2. Nên sử dụng

Ta có:
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ -x + 2(5 - 2x) = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ -5x + 10 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - 2 \cdot 3 = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(3; -1)$.

① Phương pháp cộng đại số:

➤ Các bước giải:

- Bước 1: Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ phương trình bằng nhau hoặc đối nhau.
- Bước 2: Cộng hay trừ từng vế của hai phương trình của hệ để được một phương trình một ẩn và giải phương trình đó.
- Bước 3: Thế giá trị của ẩn tìm được ở bước 2 vào một trong hai phương trình của hệ đã cho để tìm giá trị của ẩn còn lại. kết luận nghiệm của hệ.

VD: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 3y = 5 & (1) \\ 4x + 5y = 3 & (2) \end{cases}$$

Giải:

Ta có:
$$\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 12y = -20 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases} \quad \text{Nhân cả hai vế của phương trình (1) với } -4$$

$$\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 17y = -17 \end{cases} \quad \text{Cộng từng vế}$$

$$\begin{cases} x - 3(-1) = 5 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{Thay } y = -1 \text{ tìm } x$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(2; -1)$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Mỗi câu sau đây đều có 4 lựa chọn, hãy khoanh tròn đáp án chính xác nhất.

Câu 1: Trong các phương trình sau, phương trình bậc nhất hai ẩn m và n là:

- A. $2m - 3n = 1$ B. $0m + 0n = 3$ C. $m^2 + 2n = 4$ D. $3m - n^2 = -1$.

Câu 2: Trong các phương trình sau, **không phải** phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là:

- A. $2x - 0y = 2$ B. $0x + 0y = 1$ C. $0x + 3y = 3$ D. $5x - 3y = 2$

Câu 3: Cặp số $(-1; 1)$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

- A. $-2x + y = -8$ B. $x + 5y = -3$ C. $2x + 3y = 1$ D. $5x + y = 10$

Câu 4: Phương trình $5x - 2y = 7$ có hệ số a bằng:

- A. 5 B. -5 C. -2 D. 7

Câu 5: Phương trình nào sau đây có hệ số $a = 1$?

- A. $5x + y = 7$ B. $-x + 2y = 1$ C. $x - 2y = 3$ D. $5x - y = 0$

Câu 6: Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn luôn có:

- A. vô nghiệm B. có một nghiệm C. có hai nghiệm D. có vô số nghiệm

Câu 7: Trong các hệ phương trình sau, hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là:

- A. $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 0x + 0y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x^2 + y = 3 \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 0x + 0y = -1 \end{cases}$

Câu 8: Trong các hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn sau, hệ phương trình nào nhận cặp số $(3; 1)$ là nghiệm?

- A. $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$ B. $\begin{cases} -2x + y = -5 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + y = -8 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + y = -5 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

Câu 9: Công thức nghiệm tổng quát của phương trình $0x + 4y = -16$.

A. $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -4 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x = -4 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x = 4 \end{cases}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} -x + 3y = -10 \\ x - 5y = 16 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + 0y - 6 = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -x + 4y = 10 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 0x + y = 3 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x - 5y = -18 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x + y = -3x - 20 \\ 4x + y = x - 2y - 12 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 4x - 10y = 2 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 4x + 3y = -6 \\ 2x - 5y = 16 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 5x - y = 1 \\ 10x - 2y = 0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x - y = x + 3y + 3 \\ 3x - 3y = 9 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 3x + 2y = -x \\ 5(x + y) = -3x + y - 5 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x + y = -1 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$

16) $\begin{cases} x + y = -2(x - 1) \\ 7x + 3y = x + y + 5 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 2x + 5y = -(x + y) \\ 6x + 3y = y - 10 \end{cases}$

18) $\begin{cases} -x + 2y = -4(x - 1) \\ 5x + 3y = -(x + y) + 8 \end{cases}$

Bài 2: Xác định a, b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau:

a/ $A(1;2)$ và $B(3;8)$

b/ $A(2;1)$ và $B(4;-2)$

c/ $A(0;1)$ và $B(4;0)$

d/ $A(1;1)$ và $B(2;-2)$

TOÁN LIÊN HỆ THỰC TẾ

① Các bước giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình:

– **Bước 1:** Lập hệ phương trình:

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập hai phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng

– **Bước 2:** Giải hệ phương trình.

– **Bước 3:** Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không rồi kết luận.

② Một số bài toán cần lưu ý:

➤ **Dạng toán cấu tạo số:**

- Số có hai chữ số được ký hiệu $\overline{ab}$. Giá trị của số: $\overline{ab} = 10.a + b$
(ĐK: $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9; a, b \in \mathbb{N}$).
- Số có ba chữ số được ký hiệu $\overline{abc}$. Giá trị của số: $\overline{abc} = 100.a + 10.b + c$
(ĐK: $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$).

➤ **Dạng toán liên quan đến hình học:**

- Hình chữ nhật có hai kích thước a, b có: *Diện tích:* $S = ab$; *Chu vi:* $P = 2(a + b)$
- Tam giác vuông có hai cạnh góc vuông a, b có *Diện tích:* $S = \frac{1}{2}ab$

➤ **Dạng toán chuyển động:**

- Có 3 đại lượng là *quãng đường* (s), *vận tốc* (v) và *thời gian* (t) liên hệ bởi công thức:
 $s = v.t$
- Chuyển động trên dòng nước chảy:
 - + Vận tốc khi nước đứng yên = vận tốc riêng.
 - + Vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng + vận tốc dòng nước.
 - + Vận tốc ngược dòng = vận tốc riêng - vận tốc dòng nước.

➤ **Dạng toán có tỉ lệ phần trăm:**

- *Bài toán giảm giá:*
 - + Giá đã giảm = Giá ban đầu . (100% - % giảm)
 - + Giá ban đầu = Giá đã giảm : (100% - % giảm)
- *Bài toán tăng giá:*
 - + Giá đã tăng = Giá ban đầu . (100% + % tăng)
 - + Giá ban đầu = Giá đã tăng : (100% + % tăng)

③ **Ví dụ:** (Bài toán cổ)

Vừa gà vừa chó
Bó lại cho tròn
Ba mươi sáu con
Một trăm chân chẵn
Hỏi có bao nhiêu gà, bao nhiêu chó?

Giải:

Gọi x, y (con) là số con gà, con chó ($x, y \in \mathbb{N}$ và $0 < x, y < 36$)

Khi đó: Số chân gà là $2x$ (chân)

Số chân chó là $4y$ (chân)

Vì có tất cả là 36 con nên ta có phương trình: $x + y = 36$ (1)

Vì tổng số chân là 100 nên ta có phương trình: $2x + 4y = 100$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 36 \\ 2x + 4y = 100 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được:
$$\begin{cases} x = 22 \\ y = 14 \end{cases}$$
 (nhận so với điều kiện)

Vậy số con gà là 22 con và số con chó là 14 con.

➤ Dạng 1: BÀI TOÁN CẤU TẠO SỐ

Bài 1: Tìm 1 số có 2 chữ số biết rằng chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục 3 đơn vị . Nếu tăng thêm chữ số hàng đơn vị 1 đơn vị thì được số gấp đôi chữ số hàng chục

Bài 2: Một phân số có mẫu số lớn hơn tử số 21 đơn vị . Tìm phân số đó biết rằng ba lần mẫu số bằng 4 lần tử số

Bài 3: Tìm 1 số có 2 chữ số . Biết rằng nếu viết thêm 1 vào bên phải số này thì được 1 số có 3 chữ số hơn số phải tìm 577 và số phải tìm hơn số đó nhưng viết theo thứ tự ngược lại với số phải tìm ?

Bài 4: Tìm hai số biết rằng tổng của chúng bằng 156, nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 6, số dư là 9.

Bài 5: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, tổng các chữ số bằng 8, nếu đổi vị trí hai chữ số cho nhau thì số tự nhiên đó giảm đi 36 đơn vị.

Bài 6: Tìm một số có hai chữ số biết rằng số đó gấp 19 lần chữ số hàng đơn vị của nó và nếu số cần tìm chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 6 và số dư là 11

➤ Dạng 2: BÀI TOÁN CÓ NỘI DUNG TĂNG, GIẢM DIỆN TÍCH

Bài 7: Một thửa ruộng hình chữ nhật có chiều rộng ngắn hơn chiều dài 45 m. Tính diện tích thửa ruộng, biết rằng nếu chiều dài giảm đi 2 lần và chiều rộng tăng lên 3 lần thì chu vi thửa ruộng không thay đổi.

Bài 8: Một khu vườn hình chữ nhật có hiệu nửa chu vi và 2 lần chiều rộng là 15 m, có tổng nửa chu vi và 3 lần chiều rộng là 100m. Tính diện tích khu vườn

Bài 9: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 34m. Nếu tăng thêm chiều dài 3m và chiều rộng 2m thì diện tích tăng thêm 45m^2 . Hãy tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn?

Bài 10: Một sân trường hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 16 mét. Hai lần chiều dài kém 5 lần chiều rộng 28 mét. Tính chiều dài và chiều rộng của sân trường?

Bài 11: Một hình chữ nhật có chu vi là 70 m ,nếu giảm chiều rộng đi 3m và tăng chiều dài 5m thì diện tích như cũ .Hãy tìm chiều rộng và chiều dài ?

Bài 12: Nhà bạn Minh Hiền được ông bà Nội cho một mảnh đất hình chữ nhật. Khi bạn Nam đến nhà bạn Hiền chơi, Hiền đố Nam tìm ra kích thước của mảnh đất khi cho biết: mảnh đất đó có chiều dài gấp bốn lần chiều rộng và nếu giảm chiều rộng đi 2m, tăng chiều dài lên gấp đôi thì diện tích mảnh đất đó sẽ tăng thêm $20m^2$. Các em hãy giúp Nam tìm ra chiều dài và chiều rộng của mảnh đất nhà bạn Hiền

➤ **Dạng 3: BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG**

Bài 13: Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc dự định trong một thời gian dự định. Nếu ô tô tăng vận tốc thêm 3 km/h thì thời gian rút ngắn được 2 giờ so với dự định. Nếu ô tô giảm vận tốc đi 3 km/h thì thời gian đi tăng hơn 3 giờ so với dự định. tính độ dài quãng đường AB.

Bài 14: Một ô tô và một xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh cách nhau 200 km, đi ngược chiều và gặp nhau sau 2 giờ. Tìm vận tốc của ô tô và xe máy, biết rằng nếu vận tốc của ô tô tăng thêm 10 km/h và vận tốc của xe máy giảm đi 5 km/h thì vận tốc của ô tô bằng 2 lần vận tốc của xe máy.

Bài 15: Một ô tô và một xe máy ở hai địa điểm A và B cách nhau 180km, khởi hành cùng một lúc đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 2 giờ. Biết vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là 10km/h. Tính vận tốc của mỗi xe?

Bài 16: Một ô tô đi quãng đường AB với vận tốc 50km/h rồi đi tiếp quãng đường BC với vận tốc 45km/h. Biết quãng đường tổng cộng dài 165km và thời gian ô tô đi trên quãng đường AB ít hơn thời gian đi trên quãng đường BC là 30 phút. Tính thời gian ô tô đi trên mỗi quãng đường?

Bài 17: Hai ca nô cùng khởi hành từ A đến B cách nhau 85km và đi ngược chiều nhau. Sau 1 giờ 40 phút thì gặp nhau. Tính vận tốc thật của mỗi ca nô, biết rằng vận tốc ca nô đi xuôi dòng lớn hơn vận tốc ca nô đi ngược dòng nước là 3km/h. (vận tốc thật của ca nô không đổi).

➤ **Dạng 4: BÀI TOÁN CÓ TỈ LỆ PHẦN TRĂM**

Bài 18: Nhằm đáp ứng nhu cầu sử dụng khẩu trang chống dịch COVID-19, theo kế hoạch, 1 tổ sản xuất của một nhà máy dự định làm 720000 khẩu trang. Do áp dụng kĩ thuật mới nên I đã sản xuất vượt kế hoạch 15% và tổ II vượt kế hoạch 12%, vì vậy họ đã làm được 819000 khẩu trang. Hỏi theo kế hoạch số khẩu trang của mỗi tổ sản xuất là bao nhiêu?

Bài 19: Trong một kỳ thi, hai trường A,B có tổng cộng 350 học sinh dự thi. Kết quả là hai trường có tổng cộng 338 học sinh trúng tuyển. Tính ra thì trường A có 97% và trường B có 96% học sinh dự thi trúng tuyển. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu thí sinh dự thi?

Bài 20: Có hai loại quặng sắt, quặng loại A chứa 60% sắt, quặng loại B chứa 50% sắt. Người ta trộn một lượng quặng loại A với một lượng quặng loại B thì được hỗn hợp chứa $\frac{8}{15}$ sắt. Nếu lấy tăng hơn lúc đầu là 10 tấn quặng loại A và lấy giảm hơn lúc đầu là 10 tấn quặng loại B thì được hỗn hợp quặng chứa $\frac{17}{30}$ sắt. Tính khối lượng quặng mỗi loại đem trộn lúc đầu.

Bài 21: Hai tổ sản xuất được giao làm 800 sản phẩm trong 1 thời gian quy định, nhờ tăng năng suất lao động, tổ 1 vượt mức 10%, tổ hai vượt mức 20% nên cả hai tổ đã làm được 910 sản phẩm. Tính số sản phẩm phải làm theo kế hoạch của mỗi tổ?

Bài 22: Trên địa bàn thành phố X, có 1850 học sinh lớp 9 đăng ký dự thi tuyển sinh vào lớp 10 của hai trường THPT A và B, kết quả có 680 học sinh trúng tuyển. Biết tỉ lệ trúng tuyển của

trường A là 30% và trường B là 80%. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu học sinh lớp 9 đăng ký dự thi vào lớp 10.

Bài 23: Để chuẩn bị trao thưởng cho học sinh giỏi cuối năm học, trường THCS X cần mua 2000 quyển vở và 400 cây bút để làm phần thưởng. Nhà trường dự tính để mua với giá niêm yết sẽ cần 18 triệu 400 nghìn đồng. Vì mua với số lượng lớn nên đại lý bán quyết định giảm giá 5% cho mỗi quyển vở và 6% cho mỗi cây bút, vì thế nhà trường chỉ cần trả 17 triệu 456 nghìn đồng. Tính giá tiền niêm yết của mỗi quyển vở và mỗi cây bút

Bài 24: Một máy giặt và một tivi có giá tổng cộng 28 690 000 đồng. Sau khi giảm giá 10% cho một máy giặt và 15% cho một tivi, tổng số tiền mua hai sản phẩm này chỉ còn lại 24 961 000 đồng. Tính giá tiền mỗi sản phẩm trước khi giảm giá.

Bài 25: Hưởng ứng ngày “Ngày sách và văn hóa đọc Việt Nam năm 2022”, một nhà sách đã có chương trình giảm giá cho tất cả loại sách. Bạn Nam đến mua một cuốn sách tham khảo môn Toán và một cuốn sách tham khảo môn Ngữ Văn với tổng giá ghi trên hai quyển sách đó là 195 000 đồng. Nhưng do quyển sách tham khảo môn Toán được giảm giá 20% và quyển sách tham khảo môn Ngữ văn được giảm giá 35% nên bạn Nam chỉ phải trả cho nhà sách 138 000 đồng để mua hai quyển sách đó. Hỏi giá ghi trên mỗi quyển sách tham khảo đó là bao nhiêu?

Bài 26: Trong tháng đầu, hai tổ công nhân sản xuất được 800 chi tiết máy, sang tháng thứ hai, tổ 1 vượt mức 15% và tổ 2 vượt mức 20%, do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 945 chi tiết máy. Hỏi trong tháng một mỗi tổ công nhân sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

Bài 27: Một dung dịch chứa 30% axit nitric (tính theo thể tích) và một dung dịch khác chứa 55% axit nitric. Cần phải trộn thêm bao nhiêu lít dung dịch loại 1 và loại 2 để được 100 lít dung dịch 50% axit nitric?

Bài 28: Một người mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng 2,17 triệu đồng, kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai. Nếu thuế VAT là 9% đối với cả hai loại hàng thì người đó phải trả tổng cộng 2,18 triệu đồng. Hỏi nếu không kể thuế VAT thì người đó phải trả bao nhiêu tiền cho mỗi loại.

➤ **Dạng 5: CÁC DẠNG TOÁN KHÁC**

Bài 29: Bạn A dự định mua 2kg quả xoài và 2kg quả vải hết 100 000 đồng. Thực tế, A mua 3kg quả xoài và 1kg quả vải hết 90 000 đồng. Tính giá tiền của 1kg xoài và giá của 1kg quả vải thực tế?

Bài 30: Lớp 9A giao cho An đi mua bánh và kẹo để tổ chức liên hoan. An mua tất cả 15 hộp bánh và 5 túi kẹo với số tiền phải trả là 850 nghìn đồng. Biết rằng, giá mỗi hộp bánh là như nhau, giá mỗi túi kẹo là như nhau và giá mỗi hộp bánh hơn giá mỗi túi kẹo là 10 nghìn đồng. Tính giá tiền để mua một hộp bánh và giá tiền để mua một túi kẹo.

Bài 31: Một tổ may gồm 47 công nhân cả nam và nữ được giao nhiệm vụ may 350 chiếc áo cho cổ động viên để cổ vũ đội tuyển U23 Việt Nam tại SEA GAME 31. Để hoàn thành nhiệm vụ, mỗi công nhân nam may 8 chiếc áo, mỗi công nhân nữ may 7 chiếc áo. Tính số công nhân nam và số công nhân nữ của tổ may đó.

Bài 32: Một đoàn khách du lịch gồm 40 người dự định tham quan đỉnh núi Bà Đen, nóc nhà Đông Nam Bộ bằng cáp treo khứ hồi (gồm lượt lên và lượt xuống). Nhưng khi tới nơi có 5 bạn trẻ muốn khám phá bằng đường bộ khi leo lên còn lúc xuống sẽ đi cáp treo để trải nghiệm nên 5

bạn chỉ mua vé lượt xuống, do đó đoàn đã chi ra 9.450.000 đồng để mua vé. Hỏi giá cáp treo khứ hồi và giá vé 1 lượt là bao nhiêu? Biết rằng giá vé 1 lượt rẻ hơn giá vé khứ hồi là 110.000 đồng.

Bài 33: Theo các chuyên gia về sức khỏe, người trưởng thành cần đi bộ từ 5000 bước mỗi ngày sẽ rất tốt cho sức khỏe. Để rèn luyện sức khỏe, anh Sơn và chị Hà đề ra mục tiêu mỗi ngày một người phải đi bộ ít nhất 6000 bước. Hai người cùng đi bộ ở công viên và thấy rằng, nếu cùng đi trong 2 phút thì anh Sơn bước nhiều hơn chị Hà 20 bước. Hai người cùng giữ nguyên tốc độ đi như vậy nhưng chị Hà đi trong 5 phút thì lại nhiều hơn anh Sơn đi trong 3 phút là 160 bước. Hỏi mỗi ngày anh Sơn và chị Hà cùng đi bộ trong 1 giờ thì họ đã đạt được số bước tối thiểu mà mục tiêu đề ra hay chưa? (Giả sử tốc độ đi bộ hàng ngày của hai người không đổi).

Bài 34 (Bình Chánh – 2020 – 2021): Hai lớp 9A và 9B cùng tham gia quyên góp tiền giúp các bạn học sinh có hoàn cảnh khó khăn do ảnh hưởng của đại dịch COVID 19. Trung bình một học sinh lớp 9A góp 18000 đồng, một học sinh lớp 9B góp 20000 đồng. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh, biết rằng cả hai lớp có 85 học sinh và tổng số tiền góp được là 1610000 đồng?

Bài 35 (Bình Tân – 2020 – 2021): Mẹ bạn Tuấn đưa 66 000 đồng nhờ bạn mua 2 ổ bánh mì thịt và 3 cái bánh bao để cả nhà cùng ăn sáng (mua đủ tiền). Hôm nay, Tuấn đổi ý chuyển sang ăn bánh bao nên bạn mua 1 ổ bánh mì thịt và 4 cái bánh bao nên còn dư được 3 000 đồng. Hỏi giá tiền phải trả cho 1 ổ bánh mì thịt và 1 cái bánh bao?

Bài 36 (Bình Thạnh – 2020 – 2021): Tháng 3, tổng số tiền điện và tiền nước sinh hoạt của gia đình An là 1075000 đồng. Trong tháng 4, tiền điện tăng 10% còn tiền nước tăng 12% nên tổng số tiền điện và tiền nước sinh hoạt của gia đình An tăng thêm 112500 đồng so với tháng 3. Em hãy tính xem gia đình An đã trả bao nhiêu tiền điện và bao nhiêu tiền nước trong tháng 3?

Bài 37 (Cần Giờ – 2020 – 2021): Theo thống kê của Bệnh viện Mắt Trung ương vào năm 2017, cả nước ta có 5 triệu trẻ em trong độ tuổi đi học mắc tật khúc xạ. Tật khúc xạ gồm các tật về mắt như: cận thị, viễn thị, loạn thị, lệch khúc xạ,... Trong số các trẻ em mắt tật khúc xạ nói trên, số trẻ em bị tật cận thị chiếm $\frac{2}{3}$ số trẻ em mắc tật khúc xạ khác. Hỏi có bao nhiêu trẻ em trong độ tuổi đi học mắc tật cận thị và bao nhiêu trẻ em mắt tật khúc xạ khác theo thống kê của bệnh viện Mắt Trung ương năm 2017

Bài 38 (Quận 1 – 2020 – 2021): Giá niêm yết của cả hai mặt hàng tại một siêu thị tổng cộng là 450 000 đồng. Nhân dịp lễ 30/4 và 1/5, siêu thị có chương trình khuyến mãi: mặt hàng thứ nhất được giảm giá 25% và mặt hàng thứ hai được giảm giá 40% so với giá niêm yết.

Một người mua mỗi mặt hàng nói trên một món trong đợt khuyến mãi nên chỉ trả tổng cộng số tiền cả hai món là 327 000 đồng, trong đó đã tính 8% thuế VAT đối với mặt hàng thứ nhất và 10% thuế VAT đối với mặt hàng thứ hai. Hỏi nếu không tính thuế VAT thì giá niêm yết của mỗi mặt hàng trên là bao nhiêu?

Bài 39 (Quận 3 – 2020 – 2021): Nhằm giúp đỡ và động viên các em học sinh, hội khuyến học đã tặng 490 quyển sách cho trường A gồm sách toán và ngữ văn. Nhà trường đã dùng $\frac{1}{2}$ số sách toán và $\frac{2}{3}$ số sách ngữ văn đó để phát cho học sinh lớp 9 có hoàn cảnh khó khăn. Biết rằng mỗi học sinh đó nhận được một quyển sách toán và một quyển sách ngữ văn. Hỏi hội khuyến học đã tặng cho trường A mỗi loại sách bao nhiêu quyển?

Bài 40 (Quận 6 – 2020 – 2021): Một chiếc xe tải đi từ Tp. Hồ Chí Minh đến TP. Cần Thơ, quãng đường dài 189km . Sau khi xe đi được 1 giờ, một chiếc xe khách bắt đầu đi từ TP. Cần Thơ về Tp. Hồ Chí Minh và gặp xe tải sau khi đã đi được 1 giờ 30 phút. Tính vận tốc của mỗi xe, biết rằng mỗi giờ xe khách đi nhanh hơn xe tải 12km

Bài 41 (Quận 10 – 2020 – 2021): Một trường THCS ở Quận 10 tổ chức cho tất cả học sinh giỏi của khối lớp 8 và khối lớp 9 đi tham quan di tích lịch sử Bến Nhà Rồng nhân dịp ngày thành lập Đoàn 26/3/2021. Nếu có 4 học sinh giỏi khối lớp 8 không tham gia thì số học sinh giỏi của khối lớp 8 còn lại bằng một nửa số học sinh còn lại của đoàn tham quan. Nếu có 8 học sinh giỏi khối lớp 9 không tham gia thì số học sinh giỏi của khối lớp 9 còn lại bằng một nửa số học sinh giỏi của khối lớp 8. Hỏi có tất cả bao nhiêu học sinh giỏi của khối lớp 8 và lớp 9?

Bài 42 (Quận 12 – 2020 – 2021): Bạn An đi mua 6 cái bánh pizza thanh long và 3 cái bánh pizza hải sản hết 2256000 đồng. Bạn Bình mua 3 cái bánh pizza thanh long và 7 cái bánh pizza hải sản hết 2624000 đồng. Biết rằng mỗi loại bánh nếu mua trên 5 cái thì sẽ được giảm 10% cho cái bánh thứ 6 trở đi. Tìm giá tiền mỗi loại bánh?

Bài 43 (Quận Bình Tân – 2023 – 2024): An nói với các bạn: “Ba lần tuổi của mình nhỏ hơn tuổi của mẹ mình là 4 tuổi và bốn lần tuổi của mình thì lại lớn hơn tuổi mẹ mình là 10 tuổi”. Hỏi số tuổi của mẹ An và An?

Bài 44 (Quận Bình Tân – 2024 – 2025): Ba ô tô chở 118 tấn hàng tổng cộng hết 50 chuyến. Số chuyến của xe thứ nhất chở gấp rưỡi số chuyến xe thứ hai. Mỗi chuyến, xe thứ nhất chở 2 tấn, xe thứ hai chở 2,5 tấn, xe thứ ba chở 3 tấn. Hỏi mỗi ô tô chở bao nhiêu chuyến?

Chương
2

BẤT ĐẲNG THỨC – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chủ đề 3. BẤT ĐẲNG THỨC – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

TÓM TẮT KIẾN THỨC

I. BẤT ĐẲNG THỨC

① Khái niệm bất đẳng thức:

- Hệ thức $a > b$ (hay $a < b$, $a \geq b$, $a \leq b$) được gọi là **bất đẳng thức** và a được gọi là vế trái, b được gọi là vế phải của bất đẳng thức.

VD:

a) Điểm bài kiểm tra là x không vượt quá 10.

Ta có bất đẳng thức $x \leq 10$, trong đó x là vế trái, 10 là vế phải.

b) Độ tuổi a tối thiểu để có thể coi bộ phim “Nhà gia tiên” là 18 tuổi.

Ta có bất đẳng thức $a \geq 18$, trong đó a là vế trái, 18 là vế phải.

② Tính chất của bất đẳng thức:

- **Tính chất bắc cầu:** Cho ba số a, b, c . Nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$.

- **Chú ý:** Tính chất bắc cầu vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $\leq, \geq, <$.

VD: $x \geq 8$ và $8 > y$, khi đó $x > y$.

- **Tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép cộng:** Cho ba số a, b và c . Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$.

- **Chú ý:** Tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép cộng vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $\leq, \geq, <$.

VD: Cho hai số a và b thỏa mã $a > b$. Chứng minh: $a + 10 > b + 7$.

Giải:

Ta có: $a > b$

Suy ra: $a + 7 > b + 7$ (cộng hai vế bất đẳng thức cho 7)

Mà $a + 10 > a + 7$

Vậy $a + 10 > b + 7$ (tính chất bắc cầu)

➤ **Tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép nhân:** Cho ba số a , b và c .

– Nếu $c > 0$ thì $a.c > b.c$.

– Nếu $c < 0$ thì $a.c < b.c$.

- **Chú ý:** Tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép nhân vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $\leq$, $\geq$, $<$.

VD: Cho hai số a và b thỏa mã $a < b$. Chứng minh: $-2a + 5 > -2b + 3$.

Giải:

Ta có: $a < b$

Suy ra: $-2a > -2b$ (nhân hai vế bất đẳng thức cho $-2 < 0$)

Suy ra: $-2a + 3 > -2b + 3$ (cộng hai vế bất đẳng thức cho 3)

Mà $-2a + 5 > -2a + 3$

Vậy $-2a + 5 > -2b + 3$ (tính chất bắc cầu)

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

① **Bất phương trình bậc nhất một ẩn – Nghiệm của bất phương trình bậc nhất một ẩn:**

➤ Bất phương trình dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$), với a , b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là **bất phương trình bậc nhất một ẩn** (ẩn là x).

VD:

a) Bất phương trình $x + 2025 > 0$ là bất phương trình bậc nhất một ẩn với $a = 1$ và $b = 2025$.

b) Bất phương trình $-2x + 9 \leq 0$ là bất phương trình bậc nhất một ẩn với $a = -2$ và $b = 9$.

c) Hai bất phương trình $0x - 12 \leq 0$ và $6x^2 - 1 > 0$ không phải là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

➤ **Nghiệm của bất phương trình bậc nhất một ẩn:**

– Với bất phương trình bậc nhất có ẩn là x , số x_0 được gọi là một **nghiệm** của bất phương trình nếu ta thay $x = x_0$ thì nhận được một khẳng định đúng.

– Giải bất phương trình là tìm **tất cả các nghiệm** của nó.

VD: Trong hai giá trị $x = 3$ và $x = -1$, giá trị nào là nghiệm của bất phương trình $2x - 5 > 0$?

Giải:

Thay $x = 3$ vào bất phương trình, ta được $2.3 - 5 = 1 > 0$ là khẳng định đúng.

Vậy $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình.

Thay $x = -1$ vào bất phương trình, ta được $2.(-1) - 5 = -7 > 0$ là khẳng định sai.

Vậy $x = -1$ không là nghiệm của bất phương trình.

② Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn:

Xét bất phương trình $ax + b > 0$ ($a \neq 0$).

– Cộng hai vế của bất phương trình với $-b$, ta được bất phương trình: $ax > -b$.

– Nhân cả hai vế của bất phương trình nhận được với $\frac{1}{a}$:

+ Nếu $a > 0$ thì nhận được nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > -\frac{b}{a}$

+ Nếu $a < 0$ thì nhận được nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < -\frac{b}{a}$.

• **Chú ý:** Với các bất phương trình có dạng $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b \geq 0$ ta thực hiện các bước tương tự.

VD: Giải các bất phương trình: a) $4x - 6 \geq 0$

Giải:

a) $4x - 6 \geq 0$

$4x \geq 6$ (chuyển vế - đổi dấu)

$x \geq \frac{3}{2}$ (chia cả hai vế cho 4)

Vậy nghiệm của bất phương trình là
 $x \geq \frac{3}{2}$.

b) $-2x + 10 < 0$

$-2x < -10$ (chuyển vế - đổi dấu)

$x > 5$ (chia cả hai vế cho -2)

Vậy nghiệm của bất phương trình là
 $x > 5$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Mỗi câu sau đây đều có 4 lựa chọn, hãy khoanh tròn đáp án chính xác nhất.

Câu 1: Cho hai số thực a, b sao cho $a < b$. Phát biểu nào sau đây là sai:

A. $a + 2 < b + 2$

B. $a - 2 < b - 2$

C. $2a < 2b$

D. $-2a < -2b$

Câu 2: Bất đẳng thức mô tả tình huống để điều khiển xe máy điện thì số tuổi x của một người phải ít nhất là 16 tuổi.:

A. $x < 16$

B. $x \leq 16$

C. $x \geq 16$

D. $x > 16$.

Câu 3: Nếu $x > 3,7$ và $y < 3,7$ thì:

A. $x = y$

B. $x < y$

C. $x > y$

D. $x + y = 3,7$

Câu 4: Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất một ẩn?

A. $x - 4 < x + 1$

B. $2x + 5y \geq 0$

C. $6x^2 - 1 \leq 0$

D. $-3x + 5 > 0$

Câu 5: Giải bất phương trình: $8x + 4 > 2(x + 5)$:

A. $x < -1$

B. $x > -1$

C. $x < 1$

D. $x > 1$

Câu 6: Trong các giá trị sau, giá trị nào **không** là nghiệm của bất phương trình $2x + 1 > 0$:

A. $x = 6$

B. $x = 1$

C. $x = 2$

D. $x = -1$

Câu 7: Nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình $2x+1 < 3(8-x)$ là:

- A. 2 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 8: Giá trị $x = -1$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

- A. $3x+1 < 0$ B. $x-1 > 0$ C. $3-x < 0$ D. $2x-1 > 0$

Câu 9: Cho $a > b$. Bất đẳng thức nào tương đương với bất đẳng thức đã cho?

- A. $a-3 > b-3$ B. $-3a+4 > -3b+4$ C. $2a+3 < 2b+3$ D. $-5b-1 < -5a-1$

Câu 10: Bạn An có 200 000 đồng. Bạn An mua một cây thước kẻ giá 6 000 đồng và một số quyển vở với giá 9000 đồng. Giả sử $x (x \in \mathbb{N}^*)$ là số quyển vở bạn An đã mua thì x phải thỏa mãn bất phương trình nào sau đây?

- A. $6000x+9000 \geq 200000$ B. $9000x+6000 \leq 200000$
C. $6000x+9000 \leq 200000$ D. $9000x+6000 \leq 200000$



BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Cho hai số a và b thỏa mãn $a > b$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

- 1) $3a-2 > 3b-4$ 2) $4-6a < 4-6b$ 3) $-5a+3 < -5b+5$

Bài 2: So sánh x và y trong các trường hợp sau:

- 1) $2x-12 < 2y-12$ 2) $-5x+10 > 10-5y$ 3) $-5(-3+6x) < 3(5-10y)$

Bài 3: Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh các bất đẳng thức sau luôn đúng

- 1) $(a+b)^2 \geq 4ab$ 2) $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ 3) $2a^2+b^2+c^2 \geq 2a(b+c)$

Bài 4: Giải các bất phương trình sau:

- | | | |
|---|---|--|
| 1) $2x+1 < 2+x$ | 2) $1-2x \geq x-2$ | 3) $3x+1 > \frac{1}{2}x-3$ |
| 4) $3(x-2)-5 \geq 3(2x-1)$ | 5) $4x-7 > 5(2x-3)+4$ | 6) $(x+2)(x-3) \geq x(x-1)+3$ |
| 7) $3x+4x(x-1) > (2x+1)^2$ | 8) $x^2-12x+3-(x-3)^2 > 0$ | 9) $2x-x(3x+1) \leq 21-3x(x+2)$ |
| 7) $\frac{x+1}{3} + \frac{x}{2} \geq 4$ | 8) $4 - \frac{x+4}{8} \geq \frac{x-5}{2}$ | 9) $\frac{3x-1}{3} - \frac{2x+3}{4} > \frac{4x-1}{6}$ |
| 10) $\frac{2-x}{3} < \frac{3-2x}{-5}$ | 11) $\frac{2x-1}{5} + \frac{x-2}{-3} \geq \frac{x+7}{15}$ | 12) $\frac{2-3x}{-2} - \frac{5}{4} > \frac{x}{10} - 2$ |
| 13) $\frac{3x+5}{2} - 1 \leq \frac{x+2}{3} + x$ | 14) $\frac{5}{12} - \frac{x-6}{3} > \frac{3+x}{8}$ | 15) $2 + \frac{3(x+1)}{8} \leq 3 - \frac{x-1}{4}$ |



TOÁN LIÊN HỆ THỰC TẾ

Bài 1: Sau Tết Nga có 1500000 đồng tiền lì xì. Mỗi ngày Nga để dành được 25000 đồng. Nga muốn mua một chiếc xe đạp giá 3280000 đồng. Hỏi Nga phải để dành ít nhất bao nhiêu ngày để đủ tiền mua xe?

Bài 2: Bạn Thanh có 100 nghìn đồng. Bạn muốn mua một cái bút giá 18 nghìn đồng và một số quyển vở, mỗi quyển vở giá 17 nghìn đồng. Hỏi bạn Thanh mua được nhiều nhất bao nhiêu quyển vở?

Bài 3: Người ta dùng một loại xe tải để chở bia cho một nhà máy. Mỗi thùng bia 24 lon nặng trung bình 6,7 kg. Theo khuyến nghị, trọng tải của xe (tức là tổng khối lượng tối đa cho phép mà xe có thể chở) là 5,25 tấn. Hỏi xe có thể chở được tối đa bao nhiêu thùng bia, biết bác lái xe nặng 65 kg?

Bài 4: Trong một cuộc thi tuyển dụng việc làm, ban tổ chức quy định mỗi người ứng tuyển phải trả lời 25 câu hỏi ở vòng sơ tuyển. Mỗi câu hỏi này có sẵn bốn đáp án, trong đó có một đáp án đúng. Người ứng tuyển chọn đáp đúng sẽ được cộng thêm 2 điểm, chọn đáp án sai bị trừ đi 1 điểm. Ở vòng sơ tuyển, ban tổ chức tặng mỗi người dự thi 5 điểm và theo quy định người ứng tuyển phải trả lời hết 25 câu hỏi: người nào có số điểm từ 25 trở lên mới được thi vòng tiếp theo. Hỏi người ứng tuyển phải trả lời chính xác ít nhất bao nhiêu câu hỏi ở vòng sơ tuyển thì mới được vào vòng tiếp theo?

Bài 5: Trong một kì thi gồm ba môn Toán, Ngữ văn và Tiếng Anh, điểm số môn Toán và Ngữ văn tính theo hệ số 2, điểm số môn Tiếng Anh tính theo hệ số 1. Để trúng tuyển, điểm số trung bình của ba môn ít nhất phải bằng 8. Bạn Tuấn đã đạt 9,0 điểm môn Toán và 7,5 điểm môn Ngữ văn. Hãy lập và giải bất phương trình để tìm điểm số Tiếng Anh tối thiểu mà bạn Tuấn phải đạt để trúng tuyển ?

Bài 6: Trong một kì thi gồm ba môn Toán, Ngữ Văn và Tiếng Anh, điểm số môn Toán và Ngữ văn tính theo hệ số 2, điểm môn Tiếng Anh tính theo hệ số 1. Để trúng tuyển, điểm số trung bình của ba môn ít nhất bằng 8. Bạn Na đã đạt 9,1 điểm môn Toán, và 6,9 môn Ngữ Văn. Hãy lập và giải phương trình để tìm điểm số môn Tiếng Anh tối thiểu mà bạn Na phải đạt để trúng tuyển.

Bài 7: Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 1 tháng là 0,4%. Hỏi nếu muốn có số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng thì số tiền gửi lãi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

Bài 8: Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 12 tháng là 7,4%. Bà Mai dự kiến gửi một khoản tiền vào ngân hàng này và cần số tiền lãi hàng năm ít nhất là 60 triệu để chi tiêu. Hỏi số tiền bà Mai cần gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)

Chương
3

CĂN THỨC

Chủ đề 4. CĂN THỨC – TÍNH CHẤT CỦA PHÉP
KHAI PHƯƠNG

TÓM TẮT KIẾN THỨC

I. CĂN BẬC HAI

① Căn bậc hai:

➤ Cho số thực a không âm. Số thực x thỏa mãn $x^2 = a$ được gọi là một **căn bậc hai** của a .

• Nhận xét:

– Số dương a có hai căn bậc hai đối nhau là $\sqrt{a}$ (căn bậc hai số học của a) và $-\sqrt{a}$.

VD: 25 có hai căn bậc hai là $\sqrt{25} = 5$ và $-\sqrt{25} = -5$.

– Số 0 có một căn bậc hai là 0: $\sqrt{0} = 0$

• Chú ý:

– Số âm không có căn bậc hai.

– Phép toán tìm căn bậc hai số học của số không âm gọi là *phép khai căn bậc hai* hay *phép khai phương* (gọi tắt là khai phương).

– Ở lớp 7 ta đã biết, nếu $a > b > 0$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. Từ đó suy ra: $-\sqrt{a} < \sqrt{b} < 0 < \sqrt{b} < \sqrt{a}$.

② Căn thức bậc hai:

➤ Với A là một biểu thức đại số, ta gọi $\sqrt{A}$ là căn thức bậc hai của A , còn A được gọi là biểu thức lấy căn hoặc biểu thức dưới dấu căn.

VD: $\sqrt{x}$; $\sqrt{3x-2}$; $\sqrt{x^2-4x+1}$ là các căn thức bậc hai.

• Điều kiện xác định (có nghĩa) của một số căn thức bậc hai:

▪ $\sqrt{A}$ xác định khi $A \geq 0$

▪ $\frac{1}{\sqrt{A}}$ xác định khi $A > 0$

▪ $\sqrt{\frac{A}{B}}$ xác định khi $\frac{A}{B} \geq 0$ và $B \neq 0$.

VD: Cho biểu thức $A = \sqrt{2x-8}$.

a) Với giá trị nào của x thì biểu thức A xác định?

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=6$ và $x=2$.

Giải:

a) Biểu thức A xác định khi $2x-8 \geq 0$ hay $x \geq 4$.

b) Khi $x=6$, ta có: $A = \sqrt{2.6-8} = \sqrt{4} = 2$.

Khi $x=2 < 4$ nên A không xác định tại $x=2$.

II. CĂN BẬC BA

① Căn bậc ba của một số:

- Cho số thực a , số thực x thỏa mãn $x^3 = a$ được gọi là **căn bậc ba** của a .
- Mỗi số thực đều có đúng một căn bậc ba, kí hiệu $\sqrt[3]{a}$.
- **Chú ý:** Từ định nghĩa căn bậc ba, ta có $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$.

VD: Vì $2^3 = 8$ nên $\sqrt[3]{8} = 2$

Vì $(-6)^3 = -216$ nên $\sqrt[3]{-216} = -6$.

② Căn thức bậc ba:

- Với A là một biểu thức đại số, ta gọi $\sqrt[3]{A}$ là căn thức bậc ba của A .

VD: Cho biểu thức $A = \sqrt[3]{5x-2}$. Tính giá trị của A khi $x=2$ và $x=-5$.

Giải:

Khi $x=2$, ta có: $A = \sqrt[3]{5.2-2} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$.

Khi $x=-5$, ta có: $A = \sqrt[3]{5.(-5)-2} = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$.

III. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP KHAI PHƯƠNG

① Căn thức bậc hai của một bình phương:

- Với mọi số thực a , ta có $\sqrt{a^2} = |a|$.

- **Tổng quát:** Với biểu thức A bất kì, ta có: $\sqrt{A^2} = |A|$, nghĩa là:

– $\sqrt{A^2} = A$ khi $A \geq 0$ (tức là khi A nhận giá trị không âm)

– $\sqrt{A^2} = -A$ khi $A < 0$ (tức là A nhận giá trị âm)

VD: a) $\sqrt{5^2} = |5| = 5$

b) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = -(2-\sqrt{5}) = \sqrt{5}-2$ (vì $2 < \sqrt{5}$)

$$c) \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = |\sqrt{3}+1| = \sqrt{3}+1$$

$$d) \sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} = |\sqrt{5}-\sqrt{2}| = \sqrt{5}-\sqrt{2} \text{ (vì } \sqrt{5} > \sqrt{2} \text{)}$$

② Căn thức bậc hai của một tích:

➤ Với hai biểu thức A và B nhận giá trị không âm, ta có: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$.

VD: a) $\sqrt{25 \cdot 16} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{16} = 5 \cdot 4 = 20$ b) $\sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$

➤ **Biến đổi đưa thừa số ra ngoài dấu căn:**

Với số thực a bất kì và b không âm, ta có: $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \sqrt{b}$.

VD: a) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = |2| \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$$b) \sqrt{5(x-3)^2} = |x-3| \cdot \sqrt{5} = \begin{cases} (x-3) \cdot \sqrt{5}, & x \geq 3 \\ -(x-3) \cdot \sqrt{5}, & x < 3 \end{cases}$$

➤ **Biến đổi đưa thừa số vào trong dấu căn:**

– Nếu $a \geq 0$ thì $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$.

– Nếu $a < 0$ thì $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 \cdot b}$.

VD: a) $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$

b) Với $x < 0$, thì: $x\sqrt{7} = -\sqrt{7x^2}$

• **Nhận xét:** Với biểu thức A, B với $B \geq 0$, ta có: $\sqrt{A^2 \cdot B} = |A| \sqrt{B}$.

③ Căn thức bậc hai của một thương:

➤ Với biểu thức A nhận giá trị không âm và B nhận giá trị dương, ta có: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

VD: a) $\sqrt{\frac{25}{121}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{121}} = \frac{5}{11}$

b) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$

④ Các phép tính trong căn:

• **Phép tính cộng trừ căn đồng dạng:** Ta chỉ có thể cộng trừ các căn bậc hai “đồng dạng”.

VD: $-3\sqrt{5} + 8\sqrt{5} - 9\sqrt{5} = (-3+8-9)\sqrt{5} = -4\sqrt{5}$

• **Phép tính nhân:** $(A\sqrt{B}) \cdot (C\sqrt{D}) = A \cdot C \cdot \sqrt{B \cdot D}$

VD: $2\sqrt{3} \cdot (-4\sqrt{5}) = 2 \cdot (-4) \sqrt{3 \cdot 5} = -8\sqrt{15}$

- **Phép tính chia:** $(A\sqrt{B}) : (C\sqrt{D}) = \frac{A}{C} \cdot \sqrt{\frac{B}{D}}$

VD: $18\sqrt{35} : 9\sqrt{5} = \frac{18}{9} \sqrt{\frac{35}{5}} = 2\sqrt{7}$

- **Phép tính lũy thừa:** Ta lũy thừa một tích: $(A\sqrt{B})^2 = A^2 \cdot (\sqrt{B})^2$

VD: $(4\sqrt{3})^2 = 4^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 16 \cdot 3 = 48$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Mỗi câu sau đây đều có 4 lựa chọn, hãy khoanh tròn đáp án chính xác nhất.

Câu 1: Căn bậc hai của 25 là

- A. 5 B. -5 C. 5 và -5. D. $\sqrt{5}$ và $-\sqrt{5}$

Câu 2: Căn bậc hai số học của 81 là

- A. 9 B. -9 C. 9 và -9. D. $\sqrt{9}$ và $-\sqrt{9}$.

Câu 3: Phát biểu *sai* là:

- A. Căn bậc ba của một số dương là số dương. B. Căn bậc ba của một số âm là số âm.
C. Số âm không có căn bậc ba. D. Căn bậc ba của số 0 bằng chính nó.

Câu 4: Cho biểu thức $A = \sqrt{x+5}$. Điều kiện xác định của A là:

- A. $x > 5$ B. $x \geq -5$ C. $x < -5$ D. $x \leq -5$

Câu 5: Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{4-3x}$ là:

- A. $x \geq \frac{4}{3}$ B. $x \leq -\frac{4}{3}$ C. $x \leq \frac{4}{3}$ D. $x \leq \frac{3}{4}$

Câu 6: Tính: $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} - \sqrt{2}$ có kết quả là:

- A. $1-2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}-1$ C. 1 D. -1

Câu 7: Rút gọn biểu thức $\sqrt{\frac{a^3}{a}}$ với $a < 0$, ta được kết quả là:

- A. a B. a^2 C. $-a$ D. $-(-a)$

Câu 8: Hãy chọn câu đúng?

- A. $\sqrt{(a-5)^2} = a-5$ B. $\sqrt{(a-5)^2} = 5-a$ C. $\sqrt{(a-5)^2} = |a-5|$ D. $\sqrt{(a-5)^2} = (a-5)^2$

Câu 9: $\sqrt{x-1}$ *không* xác định tại giá trị x bằng

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 10: Độ dài cạnh của mảnh vườn hình vuông diện tích $50m^2$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư) là:

- A. 7,000m B. 7,0710m C. 7,0715m D. 7,0711m

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Tìm điều kiện có nghĩa của các căn thức sau:

- 1) $\sqrt{2x+5}$ 2) $\sqrt{1-2x}$ 3) $\sqrt{x-2}$ 4) $\sqrt{2x+8}$ 5) $\frac{4}{\sqrt{3x-5}}$ 6) $\frac{2x}{\sqrt{4-6x}}$
 7) $\frac{\sqrt{3x-6}}{2x}$ 8) $\sqrt{\frac{2}{3x-3}}$ 9) $\sqrt{\frac{-3}{2x-3}}$ 10) $\sqrt{\frac{-3}{4-2x}}$ 11) $\sqrt{2x^2+3}$ 12) $\sqrt{x^4+2}$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau

- 1) $2\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 14\sqrt{3}$ 2) $3\sqrt{8} - 5\sqrt{32} + \sqrt{72}$
 3) $\frac{1}{2}\sqrt{8} + \frac{2}{3}\sqrt{18} - 2\sqrt{32} + 5\sqrt{2}$ 4) $\frac{3}{2}\sqrt{12} + \frac{7}{5}\sqrt{75} - \sqrt{300} + \sqrt{108}$
 5) $\frac{3}{2}\sqrt{12} + \sqrt{75} - 2\sqrt{300} + \frac{2}{6}\sqrt{108}$ 6) $2\sqrt{18} - 3\sqrt{80} - 5\sqrt{147} + 5\sqrt{245} - 3\sqrt{98}$

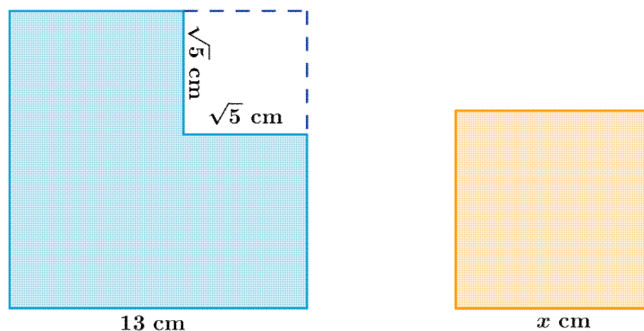
Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau (Hướng dẫn: Biến đổi biểu thức trong căn về dạng tổng hoặc hiệu bình phương rồi áp dụng $\sqrt{A^2} = |A|$):

- 1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ 2) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$ 3) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ 4) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ 5) $\sqrt{13-4\sqrt{3}}$
 6) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 7) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ 8) $\sqrt{31-12\sqrt{3}}$ 9) $\sqrt{21-12\sqrt{3}}$ 10) $\sqrt{37-20\sqrt{3}}$
 11) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$ 12) $\sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{11+6\sqrt{2}}$
 13) $\sqrt{19-6\sqrt{10}} - \sqrt{19+6\sqrt{10}}$ 14) $\sqrt{23+6\sqrt{10}} + \sqrt{47+6\sqrt{10}}$
 15) $\sqrt{49-20\sqrt{6}} - \sqrt{106+20\sqrt{6}}$ 16) $\sqrt{83-20\sqrt{6}} + \sqrt{62-20\sqrt{6}}$
 17) $(2\sqrt{2}-6)\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ 18) $(\sqrt{7}-\sqrt{3})\sqrt{10+2\sqrt{21}}$
 19) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ 20) $(3\sqrt{2}+\sqrt{10})\sqrt{28-12\sqrt{5}}$

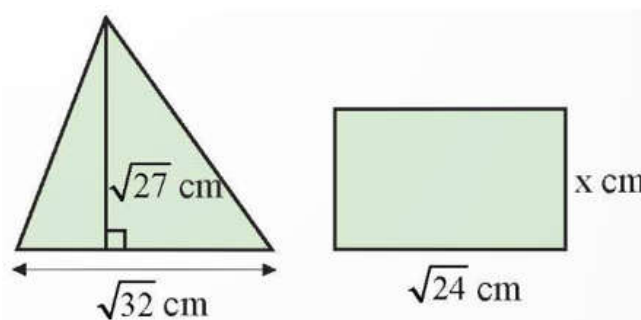
TOÁN LIÊN HỆ THỰC TẾ

Bài 1: Một tấm bìa hình vuông bị cắt đi một phần là hình vuông như hình vẽ.

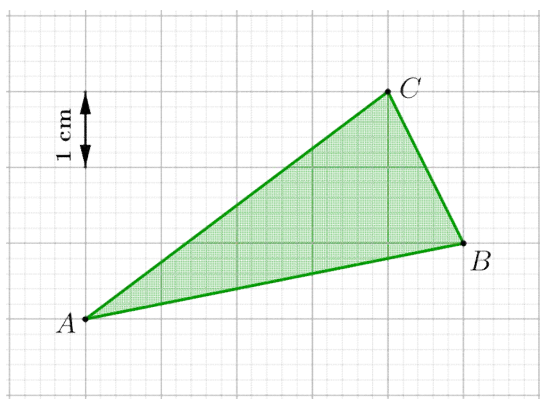
Biết diện tích hình bị cắt có diện tích bằng tám bìa hình vuông có độ dài cạnh $x(cm)$. Hãy xác định giá trị của x ?



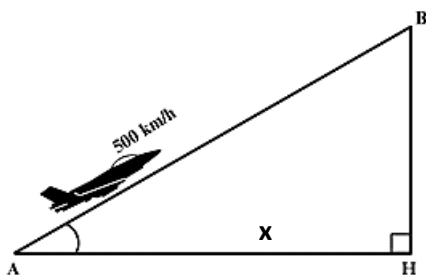
Bài 2: Biết rằng hình tam giác và hình chữ nhật ở hình vẽ có diện tích bằng nhau. Tính chiều rộng x của hình chữ nhật.



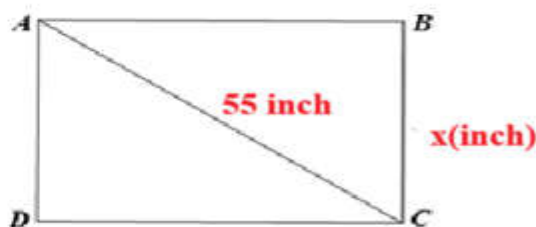
Bài 3: Tam giác ABC được vẽ trên lưới ô vuông có kích thước cạnh độ dài $1cm$ như hình vẽ. Hãy tính diện tích và chu vi của $\triangle ABC$.



Bài 4: Một máy bay bay lên với vận tốc 500 km/h (xem hình). Hãy viết biểu thức theo x biểu thị độ cao (BH) của máy bay sau 1,2 phút cất cánh.



Bài 5: Cửa hàng điện máy xanh trưng bày một chiếc ti vi màn hình phẳng 55 in, tức là độ dài đường chéo của màn hình ti vi bằng 55 inch ($1\text{ inch} = 2,54\text{ cm}$). Gọi $x(\text{inch})$ là chiều rộng của màn hình ti vi như hình vẽ. Viết công thức tính chiều dài của màn hình ti vi theo x .



Chủ đề 5. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

TÓM TẮT KIẾN THỨC

① Trục căn thức ở mẫu:

- Đối với những biểu thức chứa căn thức ở mẫu, ta thường biến đổi để khử căn thức ở mẫu đó. Phép biến đổi như vậy gọi là **trục căn thức ở mẫu**.
- Trường hợp mẫu là biểu thức dạng tích các căn thức và số:

$$\blacksquare \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A} \cdot \sqrt{B}}{\sqrt{B} \cdot \sqrt{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{B} \text{ với } A \geq 0, B > 0.$$

$$\blacksquare \frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A \cdot \sqrt{B}}{\sqrt{B} \cdot \sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \text{ với } B > 0.$$

VD: a) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{5 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$

- Nếu mẫu là một biểu thức dạng tổng (hoặc hiệu) có chứa căn, nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp của mẫu:

$$\blacksquare \frac{C}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{(\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B})} = \frac{C(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{A - B} \text{ với } A \geq 0, B \geq 0, A \neq B$$

$$\blacksquare \frac{C}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B})} = \frac{C(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{A - B} \text{ ới } A \geq 0, B \geq 0, A \neq B$$

$$\blacksquare \frac{C}{\sqrt{A} + B} = \frac{C(\sqrt{A} - B)}{(\sqrt{A} + B)(\sqrt{A} - B)} = \frac{C(\sqrt{A} - B)}{A - B^2} \text{ với } A \geq 0, A \neq B^2$$

$$\blacksquare \frac{C}{\sqrt{A} - B} = \frac{C(\sqrt{A} + B)}{(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B)} = \frac{C(\sqrt{A} + B)}{A - B^2} \text{ với } A \geq 0, A \neq B^2$$

VD: a) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

b) $\frac{2}{2 - \sqrt{6}} = \frac{2(2 + \sqrt{6})}{(2 - \sqrt{6})(2 + \sqrt{6})} = \frac{2(2 + \sqrt{6})}{2^2 - (\sqrt{6})^2} = \frac{2(2 + \sqrt{6})}{-2} = -2 - \sqrt{6}$

② Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai:

- Để rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai, ta thường cần vận dụng thích hợp các tính chất (giao hoán, kết hợp, phân phối) của các phép tính, quy tắc biến đổi về thứ tự thực hiện phép tính và các phép biến đổi đã biết.

VD: Rút gọn $P = \left(1 + \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}\right) \cdot \left(1 + \frac{x + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\right)$

Giải: $P = \left(1 + \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}\right) \cdot \left(1 + \frac{x + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\right)$

$$P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{1 - \sqrt{x}}\right) \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{1 + \sqrt{x}}\right)$$

$$P = (1 - \sqrt{x}) \cdot (1 + \sqrt{x})$$

$$P = 1 - x$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau:

- 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 2) $\frac{14}{\sqrt{7}}$ 3) $\frac{12}{5\sqrt{3}}$ 4) $\frac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}}$ 5) $\frac{3-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ 6) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-3}$
- 7) $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}-2}$ 8) $\frac{5\sqrt{6}+6\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$ 9) $\frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ 10) $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$ 11) $\frac{1}{5-2\sqrt{6}}$ 12) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau:

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $\frac{6-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1} + \frac{6+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$ | 2) $\frac{6-6\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1}$ | 3) $\frac{6-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1} + \frac{6+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$ |
| 4) $\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}$ | 5) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1} + \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ | 6) $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - (2+\sqrt{3})$ |
| 7) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} - \frac{1}{1-\sqrt{7}}$ | 8) $\frac{4}{1-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ | 9) $\frac{6}{1-\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1}$ |
| 10) $\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ | 11) $\frac{1}{\sqrt{3}-2} - \frac{1}{\sqrt{3}+2}$ | 12) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$ |
| 13) $\frac{1}{\sqrt{5}+2} - \frac{1}{\sqrt{5}-2}$ | 14) $\frac{5}{\sqrt{6}-1} - \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ | 15) $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} + \frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$ |
| 16) $\frac{\sqrt{12}-6}{\sqrt{8}-\sqrt{24}} - \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{4}{1-\sqrt{7}}$ | 17) $\frac{2\sqrt{7}+\sqrt{35}}{2+\sqrt{5}} + \frac{3}{2-\sqrt{7}}$ | 18) $\frac{-4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{4-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$ |

Bài 3: Rút gọn căn thức sau (giả sử các biểu thức đều có nghĩa):

- 1) $5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \sqrt{5}$ 2) $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a} + \sqrt{a}$
- 3) $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \sqrt{ab} \quad (a > b > 0)$ 4) $\left(3 + \frac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) \left(3 - \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$
- 5) $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 6) $\frac{a+4\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}+2} - \frac{a-4}{\sqrt{a}-2}$
- 7) $\left(1 + \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right) \left(1 - \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$ 8) $\frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}$
- 9) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 10) $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$$11) \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

$$12) \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$13) \frac{(2 + \sqrt{a})^2 - (\sqrt{a} - 3)^2}{2a - \sqrt{a}}$$

$$14) \frac{(2 - \sqrt{a})^2 - (\sqrt{a} + 3)^2}{1 + 2\sqrt{a}}$$

$$15) \left(2 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right) \left(2 - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{ab}}{\sqrt{b} - 1}\right)$$

$$16) \left(\frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} + 2\right) \left(2 - \frac{\sqrt{a} + a}{1 + \sqrt{a}}\right)$$

Bài 4: Cho biểu thức: $P = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a} - 1}\right) : \left(\frac{a + \sqrt{a}}{a - 1} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1}\right)$ với $a > 0, a \neq 1$.

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P khi $a = \frac{1}{4}$.

Bài 5: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{1 - \sqrt{a}} - \frac{1}{1 + \sqrt{a}}\right) : \left(1 + \frac{2\sqrt{a} - 1}{1 - \sqrt{a}}\right)$ với $a \geq 0, a \neq 1$.

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P khi $a = \frac{1}{4}$.

Bài 6: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 1}\right)$ với $a > 0, a \neq 1, a \neq 4$.

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P khi $a = 16$.

PHẦN

2

HÌNH HỌC

Chương
4

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Chủ đề 6. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN TRONG TAM GIÁC VUÔNG

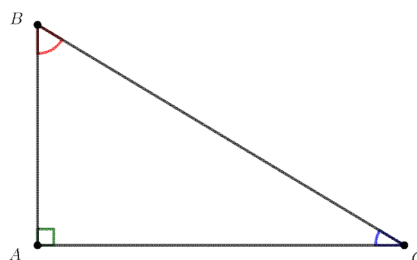
TÓM TẮT KIẾN THỨC

① Định nghĩa tỉ số lượng giác của góc nhọn:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A

➤ **Kí hiệu:**

- $\widehat{B}, \widehat{C}$: góc nhọn
- AB, AC : cạnh góc vuông
- BC : cạnh huyền (huyền)

➤ **Định nghĩa:**

- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là *sin* của góc α , kí hiệu $\sin \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là *côsin* của góc α , kí hiệu $\cos \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là *tang* của góc α , kí hiệu $\tan \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là *côtang* của góc α , kí hiệu $\cot \alpha$.

➤ **Công thức:**

$$\sin \alpha = \frac{\text{đối}}{\text{huyền}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{kề}}{\text{huyền}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{đối}}{\text{kề}}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{kề}}{\text{đối}}$$

VD: $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$) có:

$$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cot \widehat{B} = \frac{AB}{AC}$$

- Chú ý:** Với góc nhọn α ($0 < \alpha < 90^\circ$), ta có:

$$+ 0 < \sin \alpha < 1, 0 < \cos \alpha < 1.$$

$$+ \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

② Tỷ số lượng giác của hai góc phụ nhau:

- Hai góc được gọi là phụ nhau nếu chúng có tổng bằng 90° . Như vậy, góc phụ của góc nhọn α là góc $(90^\circ - \alpha)$
- Nếu hai góc phụ nhau thì $\sin$ góc này bằng $\cos$ góc kia, $\tan$ góc này bằng $\cot$ góc kia và ngược lại.

VD: $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$) có: $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$

$$\sin \widehat{B} = \cos \widehat{C}$$

$$\cos \widehat{B} = \sin \widehat{C}$$

$$\tan \widehat{B} = \cot \widehat{C}$$

$$\cot \widehat{B} = \tan \widehat{C}$$

- Chú ý:** Từ nay khi viết các tỷ số lượng giác của một góc nhọn trong tam giác, ta có thể viết $\sin A$ thay cho $\sin \widehat{A}$.

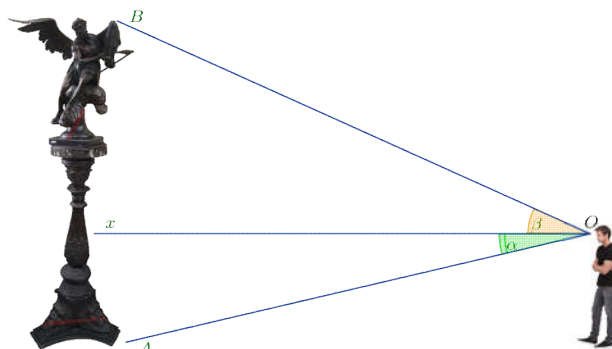
③ Hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông:

- Trong tam giác vuông **mỗi cạnh góc vuông** bằng:
 - Cạnh **huyền** nhân với **$\sin$** góc **đối** (hoặc nhân với **$\cos$** góc **kề**)
 - Cạnh **góc vuông kia** nhân với **$\tan$** góc **đối** (hoặc nhân với **$\cot$** góc **kề**)
- Giải tam giác vuông** là tìm các yếu tố còn lại (góc, cạnh) khi biết trước hai yếu tố (trong đó biết ít nhất 1 yếu tố về cạnh).

- Chú ý:** Trong đo đạc, khi người ta quan sát có hướng nhìn ngang theo tia Ox , thì:

+ Góc $\beta = \widehat{xOB}$ là góc nghiêng lên hay **góc nâng**.

+ Góc $\alpha = \widehat{xOA}$ là góc nghiêng xuống hay **góc hạ**.



CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Mỗi câu sau đây đều có 4 lựa chọn, hãy khoanh tròn đáp án chính xác nhất.

Câu 1: Cho tam giác MNP vuông tại M. Khi đó $\cot \widehat{MNP}$ bằng:

- A. $\frac{MN}{NP}$ B. $\frac{MP}{NP}$ C. $\frac{MP}{MN}$ D. $\frac{MN}{MP}$

Câu 2: Cho tam giác MNP vuông tại M. Chọn kết quả sai

- A. $\sin P = \frac{MN}{NP}$ B. $\cos P = \frac{MP}{NP}$ C. $\tan P = \frac{MN}{MP}$ D. $\tan N = \frac{MP}{MN}$..

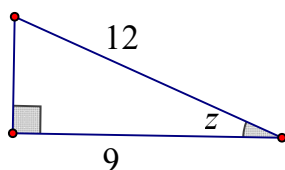
Câu 3: Cho tam giác ABC vuông tại A. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $\sin B = \cos C$ B. $\cos B = \sin C$ C. $\cot B = \tan C$ D. $\tan B = \frac{1}{\cot C}$

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông tại A có AC = 3; AB = 4; BC = 5. Khi đó $\tan C$ bằng:

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{4}{5}$

Câu 5: Cho hình vẽ, số đo z gần bằng (làm tròn đến phút)



- A. $36^{\circ}52'$ B. $41^{\circ}25'$ C. $53^{\circ}8'$ D. $48^{\circ}35'$

Câu 6: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, chọn câu đúng:

- A. $\tan B = \frac{AB}{AC}$ B. $\cos B = \frac{BC}{AB}$ C. $\sin C = \frac{AC}{BC}$ D. $\sin B = \frac{AC}{BC}$

Câu 7: Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $\sin 50^{\circ} = \cos 50^{\circ}$ B. $\sin 30^{\circ} = \sin 60^{\circ}$ C. $\cot 30^{\circ} = \tan 60^{\circ}$ D. $\cos 50^{\circ} = \cot 40^{\circ}$

Câu 8: Cho tam giác ABC vuông tại C, có $AC = 6\text{cm}$, $\hat{B} = 60^{\circ}$. Độ dài BC bằng

- A. $2\sqrt{3}\text{cm}$ B. $6\sqrt{3}\text{cm}$ C. $3\sqrt{3}\text{cm}$ D. 3cm

Câu 9: Tam giác ABC vuông tại A, có AB = 8cm, góc C = 30° . Độ dài cạnh BC là:

- A. 4cm B. $8\sqrt{3}\text{cm}$ C. 16cm D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\text{cm}$

Câu 10: Nếu $\tan A = 1$, thì góc A bằng bao nhiêu?:

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Dùng máy tính bỏ túi, hãy tính các tỉ số lượng giác sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

- | | | | | |
|------------------------|---|---------------------|---|---------------------|
| 1) $\sin 37^\circ$ | ; | $\cos 21^\circ$ | ; | $\sin 70^\circ 13'$ |
| 2) $\tan 15^\circ$ | ; | $\cot 28^\circ$ | ; | $\tan 43^\circ 10'$ |
| 3) $\cos 39^\circ 13'$ | ; | $\sin 42^\circ 28'$ | ; | $\sin 23^\circ$ |

Bài 2: Dùng máy tính bỏ túi, hãy tính góc nhọn x (làm tròn kết quả đến phút)

- | | | | |
|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 1) $\sin x = \frac{3}{4}$; | 2) $\sin x = \frac{1}{3}$; | 3) $\cos x = \frac{2}{5}$; | 4) $\cos x = \frac{5}{12}$ |
| 5) $\tan x = \frac{12}{5}$; | 6) $\tan x = \frac{4}{3}$ | 7) $\cot x = 4,173$; | 8) $\cot x = \frac{4}{5}$ |

Bài 3: $\triangle ABC$ vuông tại A có: $AB = 6\text{ cm}$ và $BC = 10\text{ cm}$. Tính các tỉ số lượng giác của $\hat{B}$ rồi suy ra các tỉ số lượng giác của $\hat{C}$.

Bài 4: Giải tam giác ABC vuông tại A biết :

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $BC = 20\text{ cm}, \hat{B} = 30^\circ$ | 5) $AB = 8\text{ cm}, \hat{C} = 50^\circ$ | 9) $AB = 12\text{ cm}, AC = 16\text{ cm}$ |
| 2) $AC = 15\text{ cm}, \hat{B} = 53^\circ$ | 6) $AC = 18\text{ cm}, \hat{C} = 37^\circ$ | 10) $AB = 5\text{ cm}, BC = 13\text{ cm}$ |
| 3) $AC = 3\text{ cm}; AB = 4\text{ cm}$ | 7) $BC = 20\text{ cm}, \hat{B} = 35^\circ$; | 11) $AC = 8\text{ cm}, BC = 21\text{ cm}$ |
| 4) $AB = 5\text{ cm}, \hat{B} = 40^\circ$ | 8) $AC = 8\text{ cm}, BC = 21\text{ cm}$ | 12) $BC = 16\text{ cm}, \hat{C} = 30^\circ$ |

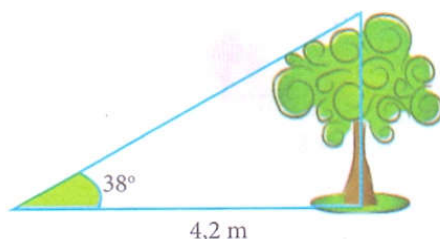
(độ dài đoạn thẳng làm tròn đến hàng đơn vị, góc làm tròn đến độ)

Bài 5: Cho tam giác ABC có $AB = 2\text{ cm}$, $AC = 3\text{ cm}$, $\hat{A} = 60^\circ$.

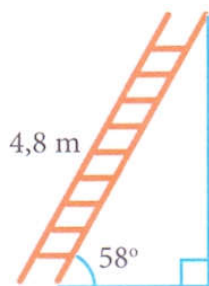
- Tính đường cao BH của tam giác ABC
- Tính BC.
- Tính độ dài đường phân giác AD của tam giác ABC.

TOÁN LIÊN HỆ THỰC TẾ

Bài 1: Một cái cây cao 6m đang có bóng dài 3,2m. Tính góc hợp bởi tia nắng với thân cây.



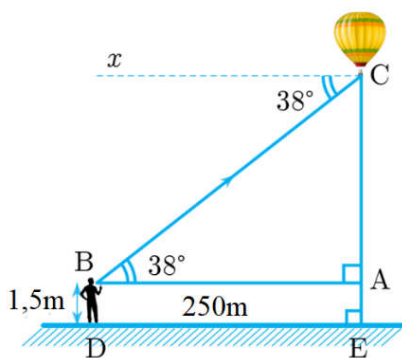
Bài 2: Một cái thang dài 4,8m dựa vào tường làm thành một góc 58° so với mặt đất. Tính chiều cao của thang so với mặt đất (hình bên).



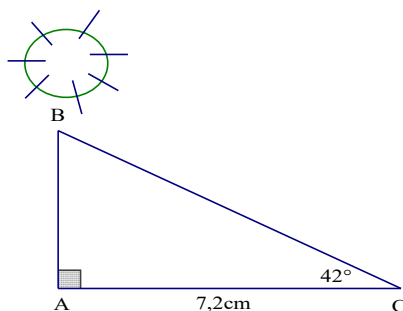
Bài 3: Một cầu trượt trong công viên có độ dốc là 28° và có độ cao là 2,1cm. Tính độ dài của mặt cầu trượt (làm tròn đến hàng phần trăm)



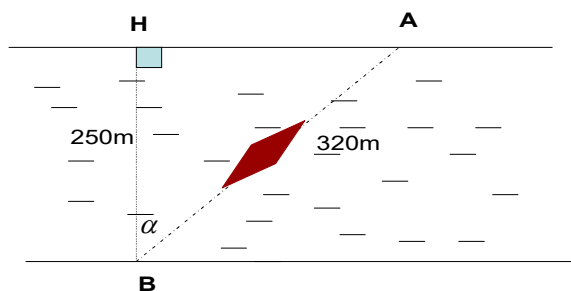
Bài 3: Một người cao 1,5 mét đứng cách nơi thả khinh khí cầu 250 mét nhìn thấy nó với góc nâng 38° như hình vẽ. Tính độ cao của khinh khí cầu so với mặt đất?



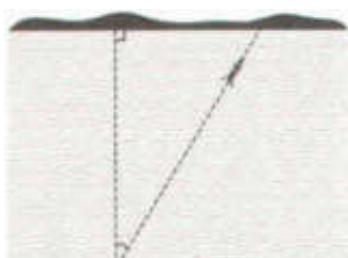
Bài 4: Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài 7,2 cm. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ 42° . Tính chiều cao của cột đèn?



Bài 5: Một khúc sông rộng khoảng 250m. Một con đò chèo qua sông bị dòng nước đẩy xiên nên phải chèo khoảng 320m mới sang được bờ bên kia. Hỏi dòng nước đã đẩy chiếc đò lệch đi một góc bằng bao nhiêu độ (góc α ở hình vẽ)

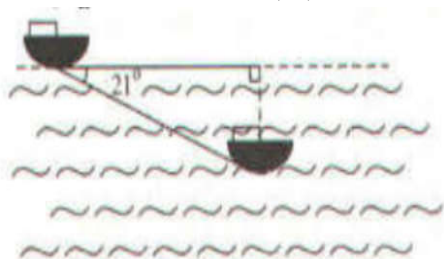


Bài 6: Một con thuyền qua khúc sông với vận tốc $3,5\text{ km/h}$ mất hết 6 phút. Do dòng nước chảy mạnh nên đã đẩy con thuyền đi qua con sông trên đường đi tạo với bờ một góc 25° . Hãy tính chiều rộng của con sông?



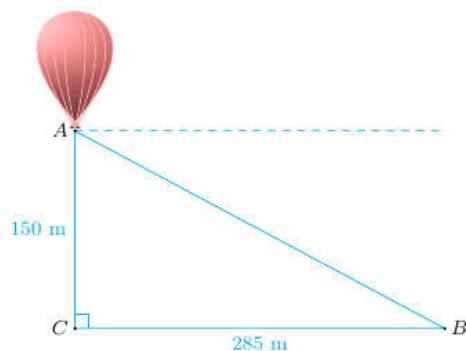
Bài 7: Trong một buổi luyện tập, một tàu ngầm ở trên mặt biển bắt đầu lặn xuống và di chuyển theo một đường thẳng tạo với mặt nước một góc 21°

- Khi tàu chuyển động theo hướng đó và đi được 250m thì tàu ở độ sâu bao nhiêu so với mặt nước (làm tròn đến đơn vị mét).
- Giả sử tốc độ trung bình của tàu là 9 km/h thì sau bao lâu (tính từ lúc bắt đầu lặn) tàu ở độ sâu 200m (cách mặt nước biển 200m) (làm tròn đến phút).

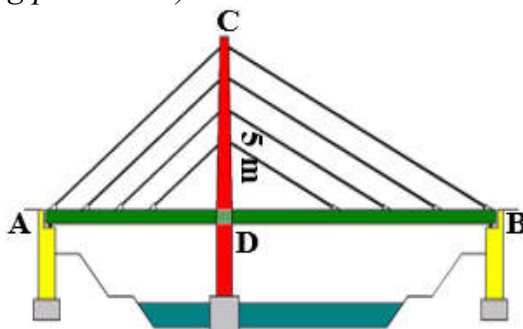


Bài 8: Một người A đang ở trên khinh khí cầu ở độ cao 150 m nhìn thấy một vật B trên mặt đất cách hình chiếu của khí cầu xuống đất một khoảng 285 m.

- Tính góc hạ từ người A đến vật B .
- Nếu khinh khí cầu tiếp tục bay lên thẳng đứng thì khi góc hạ là 46° thì độ cao của khinh khí cầu là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị).

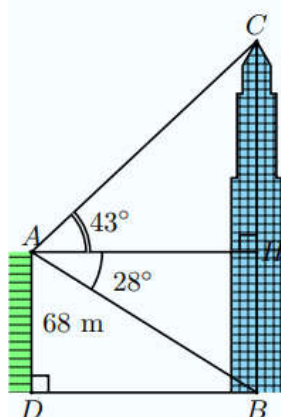


Bài 9: Một cây cầu được thiết kế như hình vẽ sau. Biết rằng chiều cao của trụ là 5m. Góc tạo bởi 2 dây ngoài cùng với thân cầu lần lượt là $\widehat{CAD} = 45^\circ$ và $\widehat{CBD} = 30^\circ$. Tính chiều dài AB phần thân cầu (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

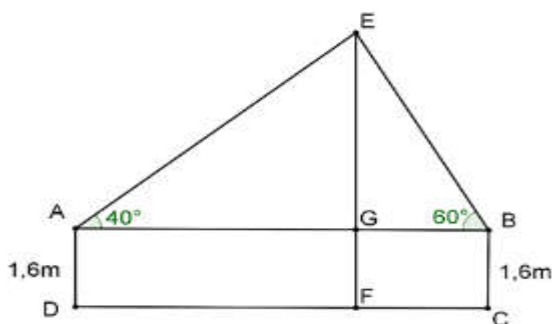


Bài 10: Từ vị trí A ở phía trên một tòa nhà có chiều cao $AD = 68\text{m}$, bác Duy nhìn thấy vị trí C cao nhất của một tháp truyền hình, góc tạo bởi tia AC và tia AH theo phương nằm ngang là $\widehat{CAH} = 43^\circ$. Bác Duy cũng nhìn thấy chân tháp tại vị trí B mà góc tạo bởi tia AB và tia AH là $\widehat{BAH} = 28^\circ$, điểm H thuộc đoạn thẳng BC.

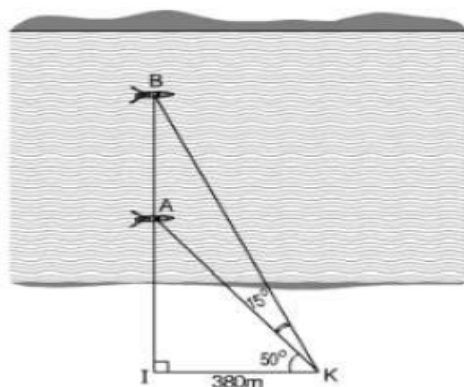
- Tính khoảng cách BD từ chân tháp đến chân tòa nhà.
- Tính chiều cao BC của tháp truyền hình (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Bài 11: Hai bạn Kiên và Nhấn có cùng tầm mắt 1,6 m, lần lượt đứng ở hai vị trí D và C. Hai bạn cùng nhìn đỉnh E của cây cột cờ với góc nâng lần lượt là 40° và 60° . Biết cột cờ EF cao 5,6m. Hãy tính khoảng cách CD giữa hai bạn.

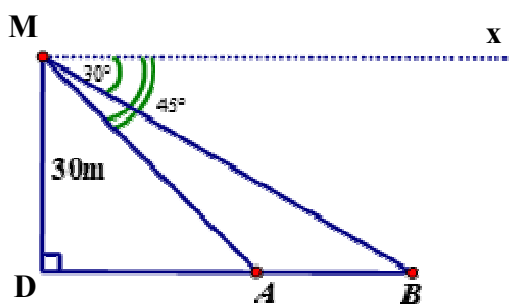


Bài 12 : Hai chiếc thuyền A và B ở vị trí được minh họa như hình dưới đây. Tính khoảng cách giữa chúng (làm tròn đến hàng đơn vị)



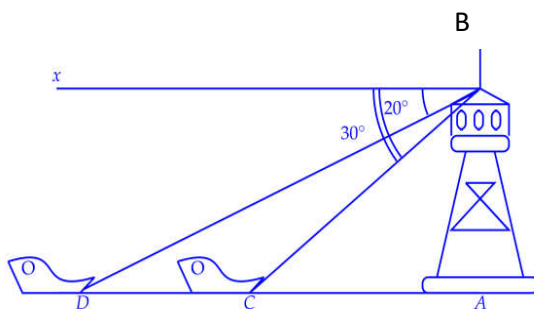
Bài 13: Từ đỉnh một tòa nhà người ta nhìn thấy chiếc xe đang đỗ với góc hạ 30° (xe ô tô ở vị trí điểm B) và góc hạ 45° (xe ô tô ở vị trí điểm A) biết tòa nhà cao 30m (như hình vẽ).

- Tính khoảng cách từ ô tô ở vị trí A đến chân tòa nhà.
- Tính khoảng cách giữa hai xe ô tô.

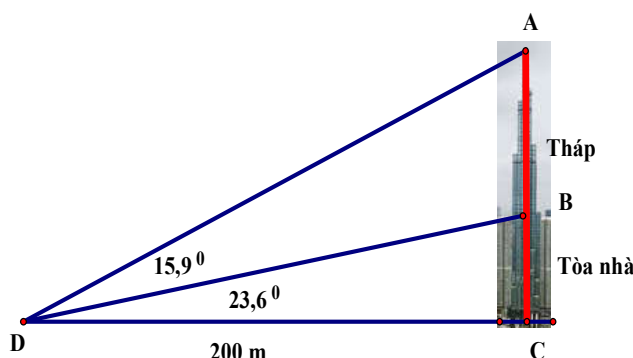


Bài 14: Một người đứng trên tháp (tại B) của ngọn hải đăng cao 105m quan sát hai lần một con tàu đang hướng về ngọn hải đăng. Lần thứ nhất người đó nhìn thấy tàu tại D với góc hạ là 20° , lần thứ hai người đó nhìn thấy tàu tại C với góc hạ là 30° .

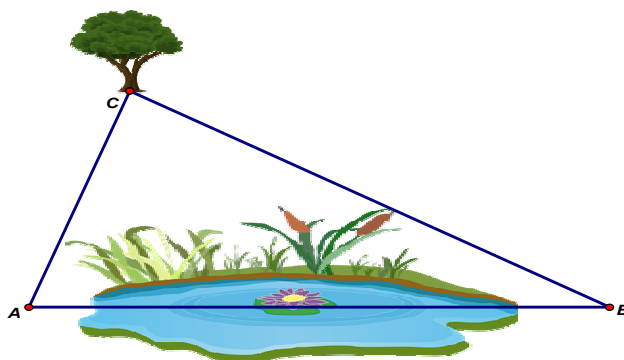
- Hỏi con tàu đã đi được bao nhiêu mét giữa hai lần quan sát (làm tròn đến hàng phần trăm).
- Biết cứ đi 10m thì tàu đó hao tốn hết 0,25 lít dầu. Hỏi khi tàu di chuyển trong khoảng hai lần quan sát cần tối thiểu bao nhiêu lít dầu? (làm tròn đến hàng đơn vị)



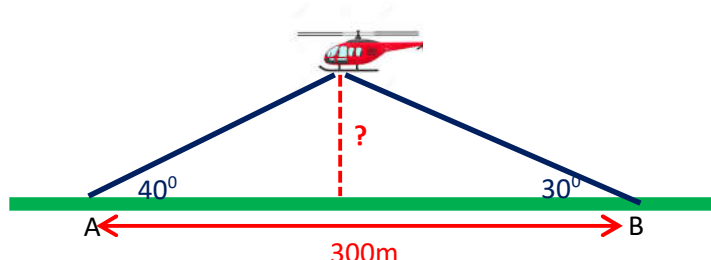
Bài 15 (Tân Phú – 2020 – 2021): Một cột tháp truyền thông có chiều cao AB được xây dựng trên nóc một toà nhà cao BC như hình bên. Biết 3 điểm A, B, C thẳng hàng và thuộc cùng phương vuông góc với mặt đất. Hãy tính chiều cao AB của cột tháp (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



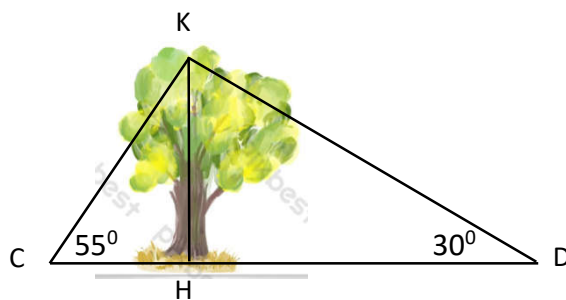
Bài 16 (Bình Thạnh – 2018 – 2019): Hai bạn A và B đứng ở hai đầu bờ hồ cùng nhìn về cây C. Biết góc nhìn tại A của bạn A là 70° , góc nhìn tại B của bạn B là 30° , và khoảng cách từ A đến C là 192m. Hỏi hai bạn A và B đứng cách nhau bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị)



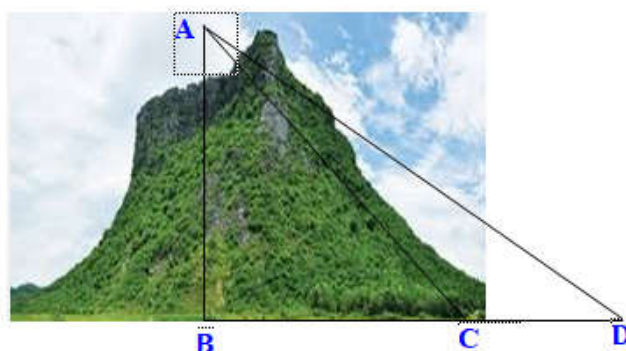
Bài 17 (Bình Tân – 2018 – 2019): Điểm hạ cánh của một máy bay trực thăng ở giữa hai người quan sát A và B. Biết khoảng cách giữa hai người này là 300m, góc nâng tại vị trí A và B lần lượt là 40° và 30° . Hãy tìm độ cao máy bay? (làm tròn đến hàng đơn vị)



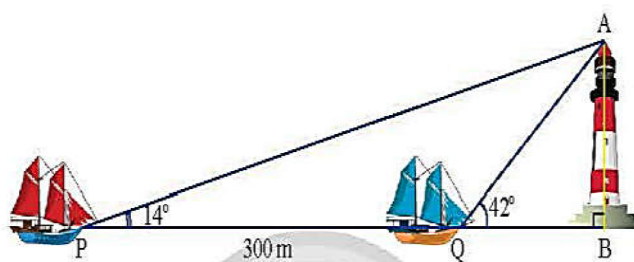
Bài 18: Hai bạn Châu và Duy đứng tại hai điểm C và D cách nhau 15m trên một con đường (hình vẽ). Hai bạn cùng nhìn lên ngọn một cái cây với các góc “nâng” lần lượt là 55° và 30° . Hỏi cây cao bao nhiêu mét?



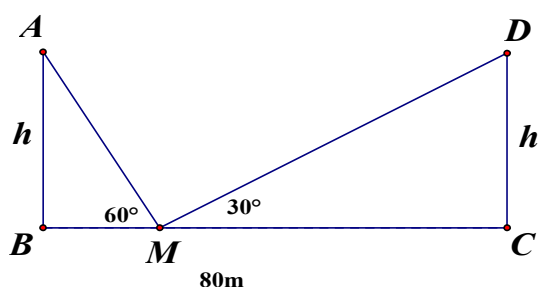
Bài 19: Để đo chiều cao AB của một ngọn núi, ta chọn một điểm C và điểm D cách nhau 50m sao cho tia DC hướng về “tâm” ngọn núi. Dùng giác kế ta đo được hai góc $C \approx 22^\circ 18'$ và góc $D \approx 20^\circ 36'$. Tính chiều cao bằng mét của quả núi.



Bài 20: Hai con thuyền ở vị trí P và Q cách nhau 300m và thẳng hàng với chân B của tháp hải đăng trên bờ biển (hình 1). Từ P và Q, người ta thấy đỉnh tháp hải đăng với các góc $\widehat{APB} = 14^\circ$ và $\widehat{AQB} = 42^\circ$. Tính chiều cao AB của tháp hải đăng (làm tròn đến hàng đơn vị).

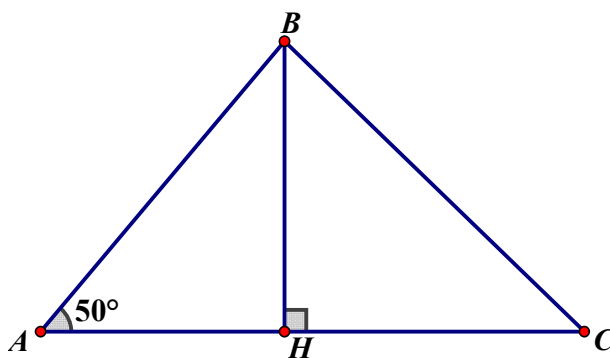


Bài 21 (Bình Tân – 2020 – 2021): Hai trụ điện có cùng chiều cao h được dựng thẳng đứng hai bên lề đối diện một đại lộ rộng 80m. Từ một điểm M trên mặt đường nằm giữa hai trụ điện người ta nhìn thấy đỉnh hai trụ điện với góc nâng lần lượt 60° và 30° . Tính chiều cao trụ điện? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)



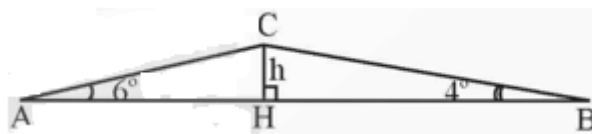
Bài 22 (Quận THPT Sài Gòn – 2020 – 2021): Hai tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A rồi di chuyển theo hai hướng khác nhau và không đổi hướng trong quá trình di chuyển. Sau 1 giờ tàu thứ nhất đi được 60 km và đang ở vị trí B (hình vẽ), còn tàu thứ hai đi dọc theo bờ biển và đang ở vị trí C cách vị trí A một khoảng 80 km. Cho biết $\widehat{BAC} = 50^\circ$ và đường bờ biển từ A đến C là đường thẳng.

- a) Tính khoảng cách BH từ tàu thứ nhất đến bờ biển sau 1 giờ di chuyển (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)
- b) Tính khoảng cách BC giữa hai tàu sau khi mỗi tàu đã khởi hành 1 giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Bài 23: Lúc 6 giờ sáng, bạn An đi xe đạp từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B). Khi đi từ A đến B, An phải đi đoạn lên dốc AC và đoạn xuống dốc CB. Biết $AB = 60\text{m}$, $\widehat{A} = 6^\circ$, $\widehat{B} = 4^\circ$.

- a) Tính chiều cao h của con dốc.
- b) Hỏi bạn An đến trường lúc mấy giờ? Biết rằng tốc độ khi lên dốc là 4 km/h và tốc độ khi xuống dốc là 19 km/h.



Chương
5

ĐƯỜNG TRÒN

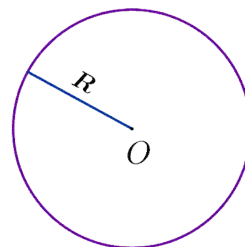
Chủ đề 7. ĐƯỜNG TRÒN – TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

TÓM TẮT KIẾN THỨC

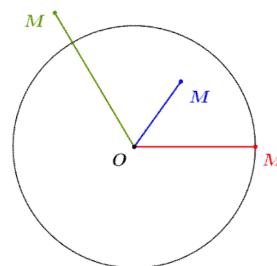
I. ĐƯỜNG TRÒN

① Khái niệm đường tròn:

- **Khái niệm:** Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách O một khoảng bằng R . Ta kí hiệu đường tròn tâm O bán kính R là $(O; R)$, ta cũng có thể kí hiệu là (O) nếu không quan tâm đến bán kính.



- **Chú ý:** Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M , khi đó:
 - Nếu $OM = R$ thì điểm M nằm trên đường tròn hay M thuộc đường tròn.
 - Nếu $OM < R$ thì điểm M nằm trong đường tròn.
 - Nếu $OM > R$ thì điểm M nằm ngoài đường tròn.



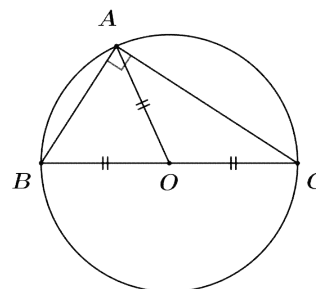
➤ Chứng minh các điểm cùng thuộc đường tròn:

Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền có độ dài bằng nửa cạnh huyền.

VD: $\triangle ABC$ vuông tại A có AO là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC .

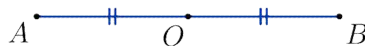
$$\text{Nên } AO = OB = OC = \frac{BC}{2}$$

Suy ra: A, B, C cùng thuộc đường tròn tâm O

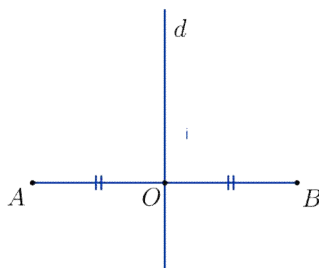


② Tính chất đối xứng của đường tròn:

- Nếu O là trung điểm của đoạn thẳng AB thì ta nói A và B đối xứng với nhau qua O .



- Nếu đường thẳng d là đường trung trực của đoạn thẳng AB thì ta nói hai điểm A và B đối xứng với nhau qua d .



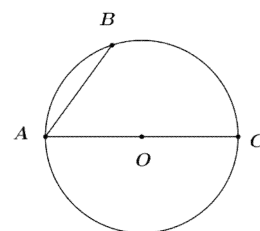
- Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.
- Đường tròn là hình có trục đối xứng. Mọi đường thẳng nào qua tâm cũng là trục đối xứng của đường tròn đó.

③ Đường kính và dây cung của đường tròn:

- Trong các dây của đường tròn, đường kính là dây có độ dài lớn nhất.

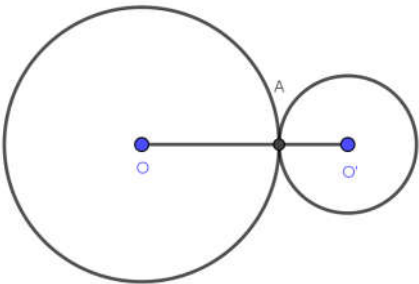
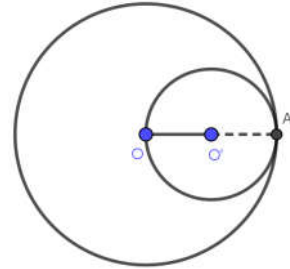
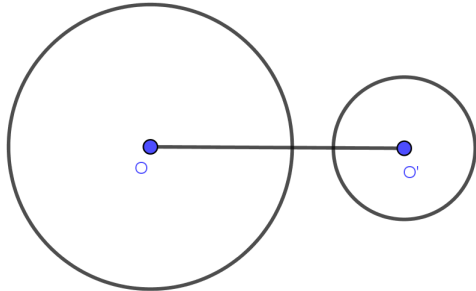
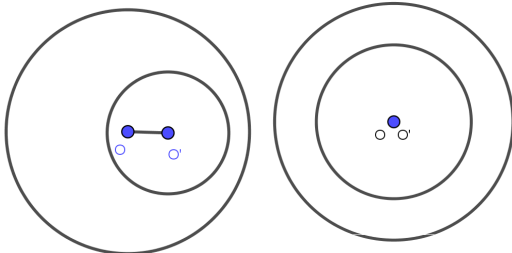
VD: Xét (O) có: AB là dây cung và AC là đường kính.

Suy ra: $AB < AC$.



④ Vị trí tương đối của hai đường tròn:

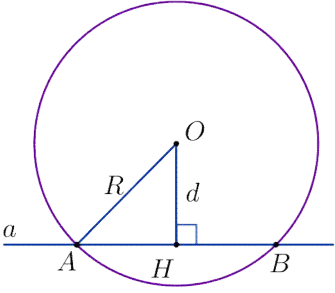
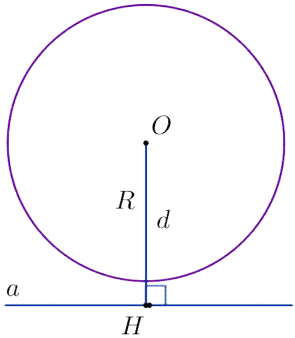
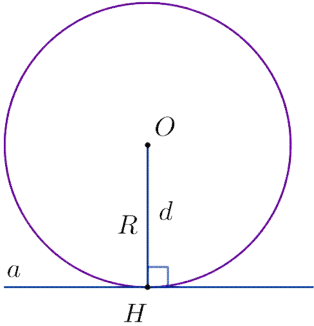
Vị trí tương đối của $(O; R)$ và $(O'; r)$	Hình vẽ	Số điểm chung	Liên hệ giữa OO' với R và r
Hai đường tròn cắt nhau	AB gọi là dây cung chung của (O) và (O')	2	$ R - r < OO' < R + r$

Hai đường tiếp xúc nhau: + Tiếp xúc ngoài		1	$OO' = R + r$
+ Tiếp xúc trong		1	$OO' = R - r $
Hai đường không giao nhau: + (O) và (O') ở ngoài nhau		0	$OO' > R + r$
+ (O) đựng (O')		0	$OO' = R - r $

II. TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

① Vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn:

Gọi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng là OH .

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa OH và R
 $OH = d < R$ Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2 (điểm $A; B$)	$OH < R$
 $OH = d > R$ Đường thẳng d và đường tròn (O) không giao nhau	0	$OH > R$
 $OH = d = R$ Đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (O)	1 (điểm H)	$OH = R$.

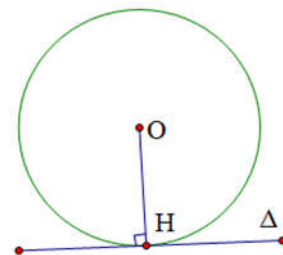
② Tiếp tuyến của đường tròn:

- **Khái niệm :** Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn thì nó vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.

VD: Δ là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm H

Suy ra $\Delta \perp OH$ tại H

Điểm H gọi là tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn (O) khi $OH = R$



- **Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn:** Một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn khi nó đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.

VD: Xét (O) , có $\Delta \perp OH$ tại H ($H \in (O)$)

Suy ra Δ là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm H .

- **Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau:** Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

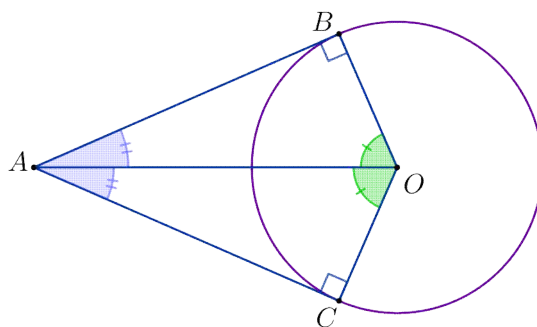
- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

VD: Xét (O) , có AB và AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A .

Suy ra: + $AB = AC$

+ OA là tia phân giác của $\widehat{BOC}$

+ AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$



CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Mỗi câu sau đây đều có 4 lựa chọn, hãy khoanh tròn đáp án chính xác nhất.

Câu 1: Tâm đối xứng của đường tròn là::

- A. Một điểm nằm bên trong đường tròn
C. Một điểm nằm bên ngoài đường tròn

- B. Một điểm nằm trên đường tròn
D. Tâm của đường tròn đó

Câu 2: Mỗi đường tròn có

- A. duy nhất một trục đối xứng
C. vô số trục đối xứng

- B. chỉ hai trục đối xứng
D. bốn trục đối xứng

Câu 3: Cho đường tròn (O) , đường kính AB , thế thì

- A. Hai điểm A và O đối xứng với nhau qua B.
- B. Hai điểm O và B đối xứng với nhau qua A.
- C. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua O.
- D. A,B,C đều đúng

Câu 4: Cho hai đường tròn $(O; 4cm)$ và $(O'; R)$ tiếp xúc ngoài, biết $OO' = 10cm$. Bán kính R bằng:

- A. $6cm$
- B. $4cm$
- C. $10cm$
- D. $14cm$

Câu 5: Xác định vị trí tương đối của 2 đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ biết:

$$OO' = 12, R = 5, R' = 3$$

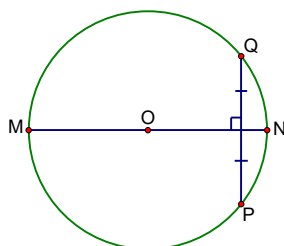
- A. Hai đường tròn cắt nhau.
- B. Hai đường tròn ở ngoài nhau.
- C. Hai đường tròn tiếp xúc trong.
- D. Hai đường tròn tiếp xúc ngoài.

Câu 6: Xác định vị trí tương đối của 2 đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ biết:

$$OO' = 6, R = 5, R' = 3$$

- A. Hai đường tròn cắt nhau.
- B. Hai đường tròn ở ngoài nhau.
- C. Hai đường tròn tiếp xúc trong.
- D. Hai đường tròn tiếp xúc ngoài.

Câu 7: Cho đường tròn (O) , đường kính MN và dây PQ như hình vẽ bên. Điểm đối xứng với điểm Q qua MN là điểm:

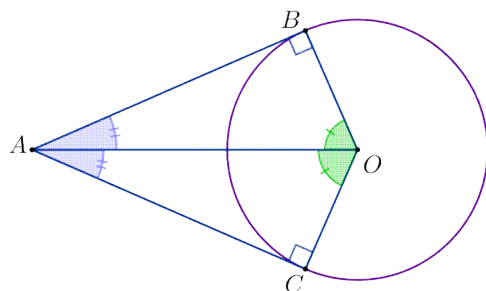


- A. P.
- B. M
- C. N
- D. O

Câu 8: Nếu đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn $(O; 3cm)$ thì khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a bằng

- A. $2cm$.
- B. $3cm$.
- C. $4cm$
- D. $5cm$

Câu 9: Cho đường tròn (O) . Từ điểm A nằm ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến $AB; AC$ (với $B; C$ là các tiếp điểm). Khi đó:



- A. $\widehat{BAO} = \widehat{ACO}$
- B. $\widehat{BOA} = \widehat{ACO}$
- C. $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$
- D. $\widehat{BOA} = \widehat{CAO}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = 5\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường tròn.
- Tính bán kính của đường tròn đó.

Bài 2: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 9\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$.

- Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.
- Tính bán kính đường tròn đó.

Bài 3: Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi E là giao điểm của CM và DN

- Tính số đo góc CEN
- Chứng minh A, D, E, M cùng nằm trên 1 đường tròn
- Xác định tâm của đường tròn đi qua 3 điểm B, D, E

Bài 4: Cho đường tròn tâm $(O; R)$, A và B nằm trên đường tròn (O) thỏa mãn $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Vẽ OH vuông góc với AB tại H .

- Chứng minh H là trung điểm của AB
- Tính OH, AB và S_{OAB} theo R
- Tia OH cắt đường tròn $(O; R)$ tại C . Tứ giác $OABC$ là hình gì? Vì sao

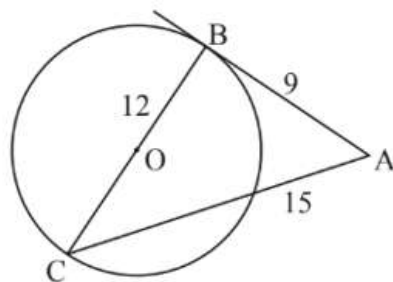
Bài 5: Cho tam giác ABC có trực tâm H và nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD

- Chứng minh $BHCD$ là hình bình hành
- Kẻ đường kính OI vuông góc BC tại I . Chứng minh I, H, D thẳng hàng
- Chứng minh $AH = 2OI$

Bài 6: Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại trực tâm H . Lấy I là trung điểm của BC

- Gọi K là điểm đối xứng của H qua I . Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành
- Xác định tâm O của đường tròn qua các điểm A, B, K, C
- Chứng minh: $OI \parallel AH$
- Chứng minh rằng: $BE \cdot BA + CD \cdot CA = BC^2$

Bài 7: Trong hình vẽ bên dưới, $AB = 9$, $BC = 12$, $AC = 15$ và BC là đường kính của đường tròn (O) . Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) .



Bài 8: Cho đường tròn tâm (O) có bán kính $OA = R$, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA .

- Tứ giác $OBAC$ là hình gì ? Vì sao ?
- Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B , cắt đường thẳng OA tại E . Tính độ dài BE theo R .

Bài 9: Cho $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB} = 30^\circ$, trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM = R$. Chứng minh rằng :

- MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- $MC^2 = 3R^2$.

Bài 10: Từ điểm A ở ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm), C là điểm trên đường tròn (O) sao cho $AC = AB$.

- Chứng minh rằng AC là tiếp điểm của đường tròn (O) .
- D là điểm trên AC . Đường thẳng qua C vuông góc với OD tại M cắt đường tròn (O) tại E ($E \neq C$). Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Bài 11: Cho tam giác ABC có hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H .

- Chứng minh bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên 1 đường tròn.
- Gọi (O) là đường tròn đi qua bốn điểm A, D, H, E và M là trung điểm của BC . Chứng minh ME là tiếp tuyến của (O) .

Bài 12: Cho đường tròn (O) đường kính AB , vẽ $CD \perp OA$ tại trung điểm I của OA . Các tiếp tuyến với đường tròn tại C và D cắt nhau ở M .

- Chứng minh rằng A, B, M thẳng hàng.
- Tứ giác $OCAD$ là hình gì ?
- Tính $\widehat{CMD}$.

Bài 13: Cho đường tròn $(O; R)$, bán kính OA , dây CD là trung trực của OA . Kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C , tiếp tuyến này cắt đường thẳng OA tại I .

- Chứng minh $\triangle OAC$ là tam giác đều.
- Chứng minh tứ giác $OCAD$ là hình thoi.
- Tính CI theo R .

Bài 14: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và M là điểm nằm trên (O) . Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của (O) lần lượt ở C và D . Đường thẳng AM cắt OC tại E , đường thẳng BM cắt OD tại F .

- Chứng minh $\widehat{COD} = 90^\circ$.
- Tứ giác $MEOF$ là hình gì?
- Chứng minh OB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD .

Bài 15: Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Qua điểm M thuộc cung nhỏ BC vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) , cắt các tiếp tuyến AB, AC lần lượt tại D và E .

- Chứng minh chu vi $\triangle ADE = 2AB$.
- Chứng minh rằng: $\widehat{BOC} = 2\widehat{DOE}$.

Bài 16: Cho đường tròn (O) và 1 điểm A nằm ngoài đường tròn (O) . Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) trong đó B, C là các tiếp điểm.

- Chứng minh đường thẳng OA là trung trực của BC .
- Gọi H là giao điểm của AO và BC . Biết $OB = 2\text{cm}, OH = 1\text{cm}$, tính chu vi và diện tích tam giác ABC và diện tích tứ giác $ABOC$.

Bài 17: Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) . Kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn đó (M, N là các tiếp điểm).

- Chứng minh rằng: $OA \perp MN$.
- Vẽ đường kính NOC . Chứng minh rằng $MC \parallel AO$.
- Tính độ dài các cạnh của tam giác AMN biết $OM = 3\text{cm}, OA = 5\text{cm}$.

Bài 18: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax , lấy P trên Ax ($AP > R$). Từ P kẻ tiếp tuyến PM với (O) .

- Chứng minh rằng bốn điểm A, P, M, O cùng thuộc 1 đường tròn.
- Chứng minh: $BM \parallel OP$.

Bài 19: Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) có BE và CF là hai đường cao cắt nhau tại H .

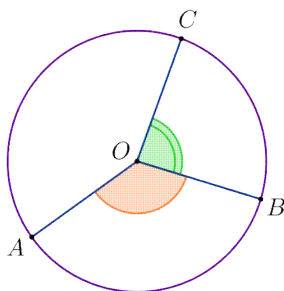
- Chứng minh: $AH \perp BC$
- Chứng minh bốn điểm A, E, H, F cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm I của đường tròn này.
- Chứng minh: $AB \cdot AF = AC \cdot AE$.
- Chứng minh: $\triangle AEF \sim \triangle ABC$.

Chủ đề 8. GÓC Ở TÂM - GÓC NỘI TIẾP

TÓM TẮT KIẾN THỨC

① Góc ở tâm:

- **Góc ở tâm** là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.



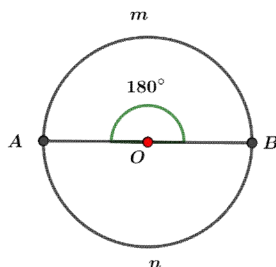
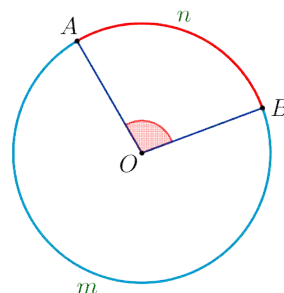
Trong (O) , các góc $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{AOC}$ được gọi là góc ở tâm.

② Cung – Số đo cung:

- **Cung:** Mỗi phần đường tròn giới hạn bởi hai điểm A và B trên đường tròn gọi là một cung AB , kí hiệu là $\widehat{AB}$.

Trong hình vẽ bên ta có:

- Góc ở tâm $\widehat{AOB}$ chắn cung AnB hay cung AnB bị chắn bởi góc ở tâm $\widehat{AOB}$.
- Khi $0^\circ < \widehat{AOB} < 180^\circ$, để phân biệt hai cung có chung các mút là A và B , $\widehat{AnB}$ là cung nhỏ và $\widehat{AmB}$ là cung lớn.
- Khi ta nói “góc ở tâm $\widehat{AOB}$ chắn cung AB ” thì ta hiểu là góc ở tâm chắn cung nhỏ AB
- Nếu AB là đường kính thì gọi cung AB là cung nửa đường tròn và $\widehat{AOB} = 180^\circ$



➤ Số đo cung:

- Số đo của cung nhỏ **bằng** số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ (có chung hai mút với cung lớn).
- Số đo của cung nửa đường tròn bằng 180° .
- Số đo của cung AB được kí hiệu $sđ\widehat{AB}$.

• Chú ý:

- + Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180° , cung lớn có số đo lớn hơn 180°
- + Khi hai mút trùng nhau ta có cung không với số đo 0° và cung cả đường tròn có số đo 360° .
- + Một cung có số đo n° thường được gọi tắt là cung n° .
- + Trong một đường tròn, hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

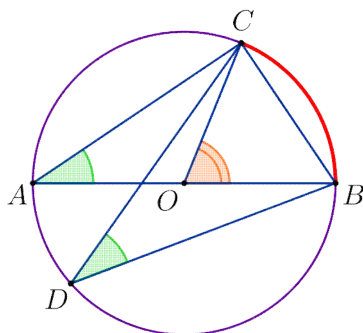
- **Tổng quát:** Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì: $sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{AC} + sđ\widehat{CB}$

③ Góc nội tiếp:

- **Góc nội tiếp** là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

➤ **Định lý:** Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

VD: $\widehat{BAC}$ là góc nội tiếp chắn $\widehat{BC}$ nên $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BC}$



➤ **Hệ quả:** Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng **chắn một cung** hoặc **chắn các cung bằng nhau** thì **bằng nhau**.

VD: $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (cùng chắn $\widehat{BC}$)

- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo **bằng nửa số đo** của góc ở tâm cùng chắn một cung.

VD: $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}$ (cùng chắn $\widehat{BC}$)

- Góc nội tiếp **chắn nửa** đường tròn là **góc vuông**.

VD: $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (vì $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Mỗi câu sau đây đều có 4 lựa chọn, hãy khoanh tròn đáp án chính xác nhất.

Câu 1: Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là:

- | | |
|-----------------|-----------------------------|
| A. Góc ở tâm | B. Góc bên ngoài đường tròn |
| C. Góc nội tiếp | D. Góc bên trong đường tròn |

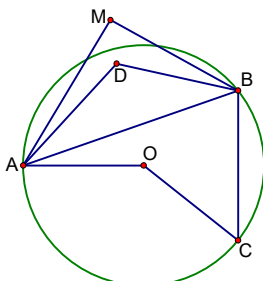
Câu 2: Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

- A. Trong một đường tròn, hai cung bằng nhau nếu chúng đều là cung nhỏ.
- B. Trong một đường tròn, hai cung bằng nhau nếu chúng có số đo nhỏ hơn 90° .
- C. Trong một đường tròn, hai cung bằng nhau nếu chúng đều là cung lớn.
- D. Trong một đường tròn, hai cung bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau

Câu 3: Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

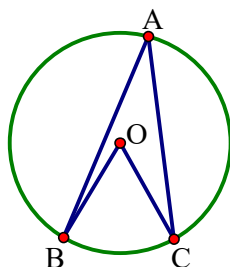
- A. Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì $sđ \widehat{AB} = sđ \widehat{AC} + sđ \widehat{CB}$.
 B. Cung lớn có số đo nhỏ hơn 180° .
 C. Số đo của nửa đường tròn bằng 90° .
 D. Cung nhỏ có số đo lớn hơn 180° .

Câu 4: Cho hình vẽ bên dưới. Góc nội tiếp là



- A. $\widehat{AMC}$ B. $\widehat{ABC}$ C. $\widehat{AOC}$ D. $\widehat{ABC}$

Câu 5: Cho hình vẽ sau, biết $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Khi đó $\widehat{BOC}$ bằng:



- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Câu 6: Khẳng định **sai** là

- A. Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp bằng nhau thì cùng chắn một cung.
 B. Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp bằng nhau chắn hai cung bằng nhau.
 C. Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.
 D. Trong một đường tròn, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Câu 7: Trong một đường tròn, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn bằng bao nhiêu độ?

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Câu 8: Từ 3 giờ đến 6 giờ thì kim giờ quay được một góc ở tâm là

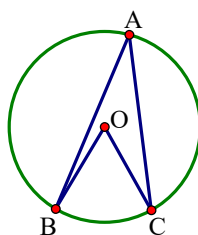
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Câu 9: Hai bán kính OA và OB của một đường tròn tạo thành góc ở tâm có số đo là 80° .

Số đo cung lớn AB là

- A. 80° B. 180° C. 280° D. 360°

Câu 10: Cho hình vẽ sau, biết $\widehat{BOC} = 50^\circ$. Khi đó $\widehat{BAC}$ bằng:



- A. 25° B. 50° C. 100° D. 150°

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Cho đường tròn $(O; R)$, lấy điểm M nằm ngoài (O) sao cho $OM = 2R$. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và MB với (O) (A, B là các tiếp điểm)

- Tính $\widehat{AOM}$
- Tính $\widehat{AOB}$ và số đo cung nhỏ $\widehat{AB}$

Bài 2: Cho $(O; R)$ và dây cung $MN = R\sqrt{3}$. Kẻ OK vuông góc với MN tại K . Hãy tính:

- Độ dài OK theo R .
- Số đo các góc $\widehat{MOK}$ và $\widehat{MON}$
- Số đo cung nhỏ và cung lớn $\widehat{MN}$

Bài 3: Cho đường tròn (O) đường kính AB và một cung AM có số đo nhỏ hơn 90° . Vẽ các dây $MC \perp AB$, $MD \parallel AB$. Chứng minh rằng $\widehat{DMB} = \widehat{ADC}$

Bài 4: Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AH . Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$

Bài 5: Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) đường kính BD . Biết $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Tính số đo của $\widehat{CBD}$

Bài 6: Cho $\triangle ABC$ nhọn có $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Vẽ đường tròn đường kính BC tâm O cắt AB, AC lần lượt tại D và E . Tính số đo góc $\widehat{ODE}$

Bài 7: Cho đường tròn (O) , đường kính AB . S là một điểm nằm bên ngoài đường tròn. SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M, N . Gọi H giao điểm của BM và AN . Chứng minh rằng $SH \perp AB$

Bài 8: Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ 2 cát tuyến MAB và MCD biết $MB > MA$, $MD > MC$. Chứng minh: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

Bài 9: Từ điểm A nằm ngoài (O) vẽ tiếp tuyến AB tại B nằm trên (O) và vẽ đoạn thẳng AD cắt (O) tại E (E nằm giữa A và D). Chứng minh: $AB^2 = AD \cdot AE$ (Hướng dẫn: vẽ thêm đường kính BC).

Bài 10: Từ điểm A nằm ngoài (O) vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (với B và C là hai tiếp điểm).

- Chứng minh: bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh: $OA \perp BC$ tại H
- Vẽ đường kính BD của (O) . Chứng minh: $CD \parallel OA$.
- Gọi E là giao điểm của AD và (O) . Chứng minh: $AB^2 = AH \cdot AO$ và $AE \cdot AD = AH \cdot AO$

Bài 11: Cho $\triangle ABC$ nhọn có ba đỉnh nằm trên đường tròn (O) . Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H , kẻ đường kính AK của (O) .

a) Chứng minh: $\triangle ABD \sim \triangle AKC$ và suy ra: $AB \cdot AC = AD \cdot AK$.

b) Kẻ AI là phân giác của $\widehat{BAC}$ ($I \in (O)$). Chứng minh: $BI = CI$.

Chủ đề 9. HÌNH QUẠT TRÒN – HÌNH VÀNH KHUYÊN

TÓM TẮT KIẾN THỨC

① Độ dài cung tròn:

➤ Trên đường tròn bán kính R , độ dài l của một cung có số đo

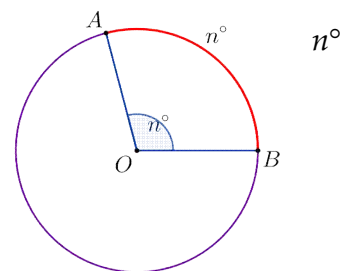
$$\text{được tính theo công thức: } l = \frac{\pi R n}{180}.$$

• Chú ý:

+ Công thức tính độ dài đường tròn: $C = 2\pi R = \pi d$.

+ Diện tích hình tròn: $S = \pi R^2 = \pi \frac{d^2}{4}$.

+ Từ nay về sau, nếu không nói gì thêm thì ta lấy π theo máy tính.

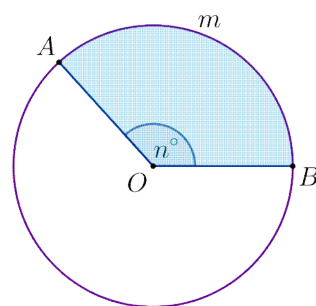


② Hình quạt tròn – Hình viên phân:

➤ **Hình quạt tròn** là một phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó.

• Diện tích hình quạt tròn bán kính R , ứng với cung n° được

$$\text{tính bởi công thức: } S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$



– Hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OA, OB và cung tròn AmB được gọi là hình quạt tròn $OAmB$ hoặc hình quạt tròn OAB .

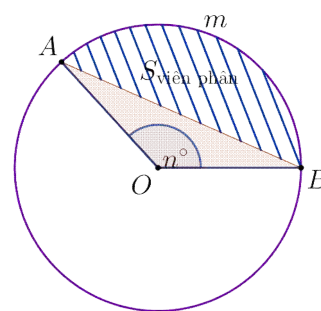
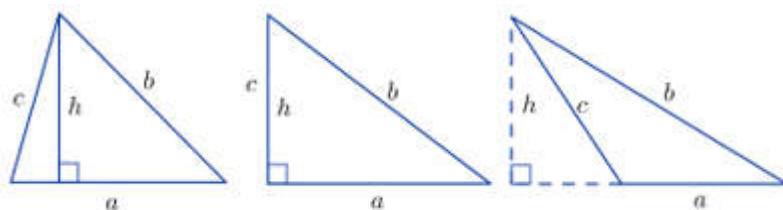
– Người ta chứng minh được diện tích hình quạt tròn tỉ lệ thuận với số đo của cung ứng với nó.

➤ **Hình viên phân** là phần diện tích được giới hạn bởi một cung và dây căng cung đó

– Diện tích hình vành khuyên được tính bởi công thức:

$$S_{\text{viên phân}} = S_{OAB} - S_{\Delta AOB}$$

- **Lưu ý:** Cách tính diện tích hình tam giác: $S = \frac{a \cdot h}{2}$ (với h là chiều cao và a là cạnh tương ứng)

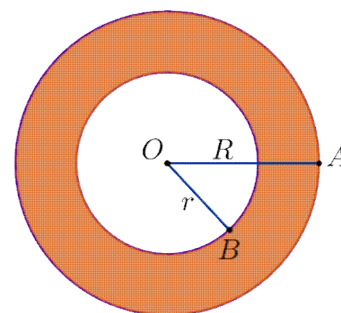


③ Hình vành khuyên:

➤ Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$ và $(O; r)$ với $R > r$, **hình vành khuyên** là phần mặt phẳng giới hạn bởi hai đường tròn $(O; r)$ và $(O; R)$

- Diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; r)$ và $(O; R)$ được tính bởi công thức:

$$S = \pi(R^2 - r^2)$$



CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Mỗi câu sau đây đều có 4 lựa chọn, hãy khoanh tròn đáp án chính xác nhất.

Câu 1: Công thức tính độ dài của đường tròn, bán kính R là:

- A. $C = 2\pi R^2$ B. $C = \pi R$ C. $C = \pi d^2$ D. $C = 2\pi R$

Câu 2: Công thức tính độ dài của một cung tròn n° , bán kính R là:

- A. $l = \frac{\pi R l}{180}$ B. $l = \frac{\pi R n}{360}$ C. $l = \frac{\pi R n^2}{180}$ D. $l = \pi R n$

Câu 3: Diện tích S của hình quạt tròn bán kính R , cung n° được tính theo công thức

- A. $S = \frac{\pi R n}{360}$ B. $S = \frac{\pi R^2 n}{180}$ C. $S = \frac{\pi R^2 n}{360}$ D. $S = \frac{\pi R n}{180}$

Câu 4: Hai bán kính OA, OB của đường tròn $(O; R)$ tạo với nhau một góc 75° , độ dài cung nhỏ AB là

- A. $\frac{3\pi R}{4}$ B. $\frac{5\pi R}{12}$ C. $\frac{7\pi R}{24}$ D. $\frac{4\pi R}{5}$

Câu 5: Một hình quạt tròn OAB của đường tròn $(O; R)$ có diện tích $\frac{7\pi R^2}{24}$ (đvdt). Vậy số đo $\widehat{AB}$ bằng

- A. 90° B. 150° C. 120° D. 105°

Câu 6: Diện tích hình quạt tròn có bán kính 6cm số đo cung 36° bằng

- A. $\frac{18}{5}\pi$ B. $\frac{6}{5}\pi$ (cm^2) C. $\frac{36}{5}\pi$ (cm^2) D. $\frac{12}{5}\pi$ (cm^2)

Câu 7: Diện tích của hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn $(O; 4\text{cm})$ và $(O; 3\text{cm})$ bằng

- A. 7cm^2 . B. 25cm^2 . C. $7\pi\text{cm}^2$. D. $25\pi\text{cm}^2$.

Câu 8: Hình quạt tròn bán kính R ứng với cung 90° có diện tích bằng

- A. πR^2 . B. $\frac{\pi R^2}{2}$ C. $\frac{\pi R^2}{4}$ D. $\frac{\pi R^2}{8}$

Câu 9: Độ dài cung AB của đường tròn $(O; 5\text{cm})$ là 20cm , diện tích hình quạt tròn OAB bằng

- A. 500cm^2 B. 50cm^2 C. 100cm^2 D. 20cm^2



BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau (lấy số $\pi \approx 3,14$, đơn vị độ dài là cm , làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Bán kính R của đường tròn	4		
Đường kính d của đường tròn		6	
Độ dài C của đường tròn			31,4

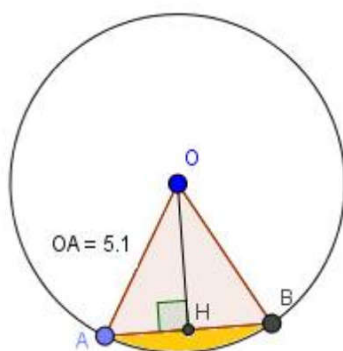
Bài 2: Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau (lấy số $\pi \approx 3,14$, đơn vị độ dài là cm , làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Bán kính R của đường tròn	2	3	
Số đo n° của cung tròn		30°	125°
Độ dài l của đường tròn	6,28		15,26

Bài 3: Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau (lấy số $\pi \approx 3,14$, đơn vị độ dài là cm , làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Bán kính R của đường tròn	3		
Độ dài C của đường tròn		21,98	
Diện tích S của đường tròn			314
Số đo n° của cung tròn	55°		27°
Diện tích hình quạt tròn cung n°		2,67	

Bài 4: Dựa vào hình vẽ sau, tính diện tích hình viên phân, biết $\widehat{AOB} = 60^\circ$; $OA = 5,1 \text{ cm}$



Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$. Hãy tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

TOÁN LIÊN HỆ THỰC TẾ

Bài 1: Máy kéo nông nghiệp có hai bánh sau lớn hơn hai bánh trước. Khi bơm căng, bánh xe sau có đường kính $1,672 \text{ m}$ và bánh xe trước có đường kính là 88 cm . Hỏi khi bánh xe sau lăn được 20 vòng thì bánh xe trước lăn được mấy vòng?



Bài 2: Chân một đồng cát trên một mặt phẳng nằm ngang là một hình tròn, biết viền đồng cát là đường tròn, có chu vi 10 m . Hỏi chân đồng cát chiếm diện tích bao nhiêu m^2 (làm tròn đến 2 chữ số thập phân)

Bài 3: Chiếc bánh kem tròn có chu vi bằng 60 cm , bạn Lan cắt ra chia đều cho 6 bạn cùng ăn (mỗi phần bánh là bằng nhau). Tính diện tích phần mặt bánh của một bạn ăn.

Bài 4: Vĩ độ của Hà Nội là $20^\circ 01'$, mỗi vòng kinh tuyến của Trái Đất khoảng $400\,000 \text{ km}$. Tính độ dài cung kinh tuyến từ Hà Nội đến xích đạo.

Bài 5: Một cửa hàng phục vụ hai loại bánh pizza có độ dày giống nhau nhưng khác nhau về kích thước. Cái nhỏ có đường kính 30 cm giá $30\,000 \text{ đ}$, cái lớn đường kính 40 cm giá $40\,000 \text{ đ}$. Hỏi mua cái nào lợi hơn? Vì sao?

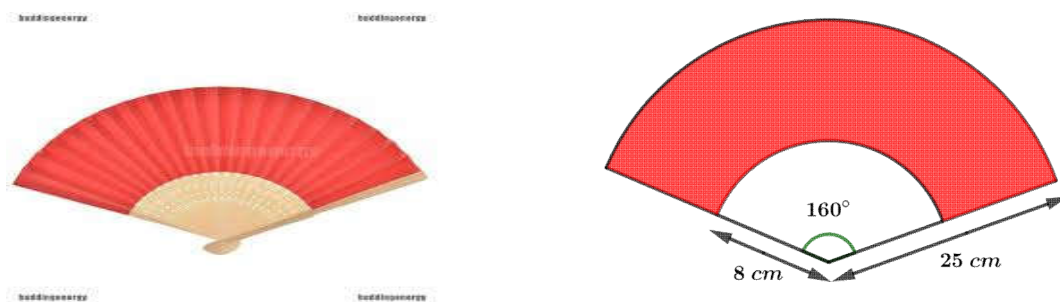


30cm – 30 000đ

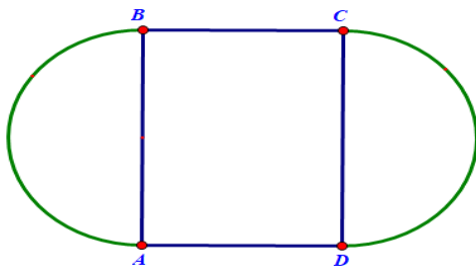


40cm – 40 000đ

Bài 6: Bạn Dung muốn làm cây quạt giấy để mang tới lớp học quạt cho đỡ nóng. Biết khi mở rộng hết cỡ thì số đo góc chỗ tay cầm là 160° , chiều dài mỗi cây nan tre tính từ chỗ gắn đỉnh nẹp (để cố định các nan tre lại) đến rìa giấy bên ngoài quạt là 25 cm , khoảng cách từ đỉnh nẹp đến rìa giấy bên trong là quạt là 8 cm . Tính diện tích phần giấy để làm quạt (biết chỗ cầm tay không bọc giấy, giấy được dán cả hai mặt, không kể phần viền, mép) (lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



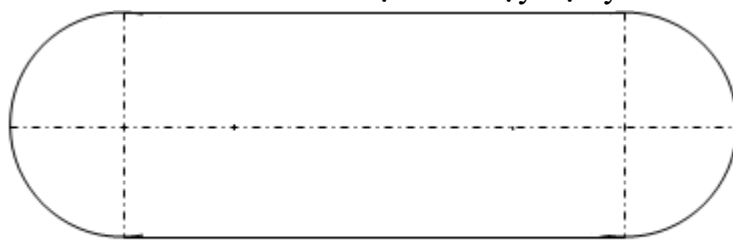
Bài 7: Một chiếc bàn hình tròn được ghép bởi hai nửa hình tròn đường kính $AB = 1,2\text{ m}$. Người ta ghép thêm một mặt hình chữ nhật $ABCD$ (xem hình) vào giữa để có diện tích mặt bàn lúc sau gấp đôi diện tích mặt bàn lúc đầu. Tính độ dài BC ?



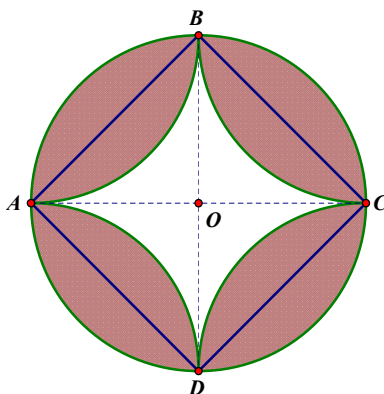
Bài 8: Một cửa sổ dạng hình vòm gồm phần hình chữ nhật phía dưới và nửa hình tròn phía trên. Phần hình chữ nhật có chiều dài của cạnh đứng là 1 m chiều dài cạnh ngang là $1,2\text{ m}$. Biết giá mỗi mét vuông cửa là 700000 đồng. Hãy tính giá tiền của cửa sổ trên?



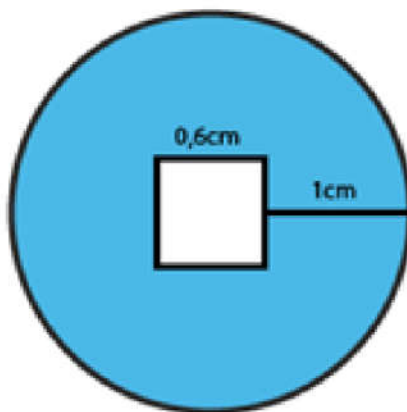
Bài 9: Đường chạy thi đấu điền kinh của một sân vận động quốc gia có độ dài 450m và có cấu trúc gồm một hình chữ nhật và hai nửa đường tròn bằng nhau (như hình vẽ). Cho biết đường chạy thẳng mỗi bên dài 100m dành cho các cuộc thi chạy cự ly 100 m. Hãy tính bán kính của đường chạy cong.



Bài 10: Trong hình vẽ bên, ABCD là hình vuông nội tiếp đường tròn tâm O có bán kính bằng 4cm. Hãy tính độ dài cạnh hình vuông và diện tích phần được tô đậm trong hình vẽ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Bài 11. Người ta làm đồng xu có kích thước như hình vẽ. Hãy tính diện tích hai bề mặt trên và dưới phần kim loại làm đồng xu.



Chủ đề 10. HÌNH TỔNG HỢP

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O; R), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (O) (A, B là 2 tiếp điểm). Vẽ đường kính AC, MC cắt đường tròn (O) tại D.

a) Chứng minh $OM \perp AB$ tại H và $BC \parallel MO$.

b) Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với CD tại I, đường thẳng này cắt AB tại N.

Chứng minh: $OI \cdot ON = OH \cdot OM$ và $\widehat{OAI} = \widehat{ONA}$.

c) Chứng minh NC là tiếp tuyến của (O)

Bài 2: Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O; R) sao cho $OA = 3R$, kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O), gọi H là giao điểm của AO và BC.

a) Chứng minh : 4 điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn và tính độ dài đoạn thẳng **AB, BC** theo R.

b) Gọi **I** và **M** lần lượt là giao điểm của tia **AO** với **(O)** ($AI < AM$). Kẻ đường kính **CD** của **(O)**. Gọi **P** và **E** lần lượt là giao điểm của **ID** với **BC** và **AB**.

Chứng minh: $AB \cdot ID = AM \cdot IB$

c) Giả sử $\widehat{BAO} = 30^\circ$. Tính diện tích hình giới hạn bởi 2 tiếp tuyến AB, BC và cung nhỏ BC.

Bài 3: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Kẻ 2 đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh: 4 điểm B, F, E, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Vẽ đường kính AK của đường tròn (O). Chứng minh: tứ giác BHCK là hình bình hành.

c) Biết $R = 15\text{cm}$; $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính diện tích phần hình tròn được giới hạn bởi cung BC và dây BC (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của cm^2)

Bài 4: Cho đường tròn (O; R) có AB là đường kính. Trên tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) lấy điểm M sao cho $OM > R$, MB cắt (O) tại N. Kẻ MC là tiếp tuyến của (O) với C là tiếp điểm.

a) Chứng minh 4 điểm M, A, O, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $MC^2 = MN \cdot MB$

c) Giả sử $AM = R\sqrt{2}$, $R = 5\text{ cm}$. Tính diện tích phần giới hạn bởi dây NB và cung nhỏ NB.

Bài 5: Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC .

a) Chứng minh $OA \perp BC$.

b) Chứng minh $AB^2 = AH \cdot AO$.

c) Cho $\widehat{BOA} = 60^\circ$. Tính diện tích phần giới hạn bởi miền ngoài của đường tròn (O) và miền trong của tam giác ABC .

Bài 6: Cho đường tròn $(O; 3cm)$. Hai điểm B, C thuộc (O) sao cho $\widehat{BOC} = 120^\circ$. Tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại A .

a) Chứng minh bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn và tính bán kính của đường tròn này.

b) Kẻ đường kính CE của (O) , AE cắt (O) tại D (D khác E). Chứng minh $AC^2 = AD \cdot AE$ và $\widehat{ABD} = \widehat{DCB}$.

c) Tính BD .

Bài 7: Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Lấy điểm C thuộc $(O; R)$ sao cho $AC > BC$. Kẻ đường cao CH của $\triangle ABC$ ($H \in AB$), kéo dài CH cắt $(O; R)$ tại điểm D ($D \neq C$). Tiếp tuyến tại điểm A và tiếp tuyến tại điểm C của đường tròn $(O; R)$ cắt nhau tại điểm M . Gọi I là giao điểm của OM và AC . Hai đường thẳng MC và AB cắt nhau tại F .

a) Chứng minh DF là tiếp tuyến của $(O; R)$.

b) Chứng minh: $AF \cdot BH = BF \cdot AH$.

Bài 8: Từ điểm M ở ngoài đường tròn $(O; R)$, vẽ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (O) (A, B là 2 tiếp điểm). Vẽ đường kính AC, MC cắt đường tròn (O) tại D .

a) Chứng minh $OM \perp AB$ tại H và $BC \parallel MO$.

b) Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với CD tại I , đường thẳng này cắt AB tại N . Chứng minh: $OI \cdot ON = OH \cdot OM$ và $\widehat{OAI} = \widehat{ONA}$.

Bài 9: Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O) (B, C là 2 tiếp điểm).

a) Chứng minh: $AO \perp BC$ tại H .

b) Kẻ đường kính CD của đường tròn (O) . Chứng minh $BD \parallel AO$.

c) Kẻ $BI \perp CD$, BI cắt AD tại E . Chứng minh: E là trung điểm của BI .

Bài 10: Cho điểm A cố định nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ cố định. Từ điểm A kẻ đường thẳng d bất kì không đi qua O , cắt đường tròn (O) tại B, C (B nằm giữa A và C). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C cắt nhau tại D . Kẻ DH vuông góc với AO tại H ; DH cắt cung nhỏ BC tại M . Gọi I là giao điểm của DO và BC .

- Chứng minh bốn điểm B, D, O, H cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $OI \cdot OD = OA \cdot OH$.
- Chứng minh đường thẳng AM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Bài 11: Cho điểm A cố định nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ cố định. Từ điểm A kẻ đường thẳng d bất kì không đi qua O , cắt đường tròn (O) tại B, C (B nằm giữa A và C). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C cắt nhau tại D . Kẻ DH vuông góc với AO tại H ; DH cắt cung nhỏ BC tại M . Gọi I là giao điểm của DO và BC .

- Chứng minh bốn điểm B, D, O, H cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $OI \cdot OD = OA \cdot OH$.
- Chứng minh đường thẳng AM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Bài 12: Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Lấy điểm C thuộc $(O; R)$ sao cho $AC > BC$. Kẻ đường cao CH của $\triangle ABC$ ($H \in AB$), kéo dài CH cắt $(O; R)$ tại điểm D ($D \neq C$). Tiếp tuyến tại điểm A và tiếp tuyến tại điểm C của đường tròn $(O; R)$ cắt nhau tại điểm M . Hai đường thẳng MC và AB cắt nhau tại F .

- Chứng minh DF là tiếp tuyến của $(O; R)$.
- Chứng minh: $MF = MA + DF$
- Tính MO theo R nếu góc AMC bằng 60° .

Bài 13: Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) , vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của BC và OA . Vẽ đường kính BM của đường tròn (O) .

- Chứng minh $OA \perp BC$ và bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi N là giao điểm của AM với (O) . Chứng minh $BN \perp AM$ và $AN \cdot AM = AH \cdot AO$
- Gọi E là giao điểm của MA và BC , I là giao điểm của AO và BN .

Chứng minh $EI \parallel BM$ và $EI \cdot HM = BI \cdot BH$

Bài 14: Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (O) (B và C là hai tiếp điểm tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

a) Chứng minh OA vuông góc với BC tại H

b) Từ B vẽ đường kính BD của (O), đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại E (khác D). Chứng minh:
 $AE \cdot AD = AH \cdot AO$

c) Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với cạnh AD tại K và cắt đường BC tại F. Chứng minh
FD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

MỤC LỤC

PHẦN 1. SỐ & ĐẠI SỐ

CHƯƠNG 1 PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH 1

Chủ đề 1. Phương trình quy về phương trình bậc nhất một ẩn 1

Chủ đề 2. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn bậc hai 6

CHƯƠNG 2 BẤT ĐẲNG THỨC – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN 16

Chủ đề 3. Bất đẳng thức – Bất phương trình bậc nhất một ẩn 16

CHƯƠNG 3 CĂN THỨC 21

Chủ đề 4. Căn thức – Tính chất của phép khai phương 21

Chủ đề 5. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn bậc hai 27

PHẦN 2. HÌNH HỌC

CHƯƠNG 4 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG 31

Chủ đề 6. Tỷ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông 31

CHƯƠNG 5 ĐƯỜNG TRÒN 42

Chủ đề 7. Đường tròn – Tiếp tuyến của đường tròn 42

Chủ đề 8. Góc ở tâm – Góc nội tiếp 50

Chủ đề 9. Hình quạt tròn – Hình vành khuyên 55

Chủ đề 10. Hình tổng hợp 61

Chúc các em đạt kết quả tốt nhất !