

Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

I. Lý thuyết

Để giải một bài toán bằng cách lập hệ phương trình ta thực hiện qua ba bước sau:

Bước 1: Lập hệ phương trình:

- Chọn các ẩn số và đặt điều kiện, đơn vị thích hợp cho các ẩn số;
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các đại lượng đã biết;
- Lập hệ phương trình biểu diễn sự tương quan của các đại lượng.

Bước 2: Giải các hệ phương trình vừa tìm được.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện ban đầu và kết luận bài toán.

II. Các dạng toán

Dạng 1: Bài toán chuyển động

Phương pháp giải: Vận dụng một số kiến thức về chuyển động sau:

- Với ba đại lượng tham gia là quãng đường (S); vận tốc (v); thời gian (t), ta có công thức liên hệ giữa ba đại lượng như sau:

$$S = vt$$

Với: S là quang đường có đơn vị là km; m...

v là vận tốc có đơn vị là km/h; m/s...

t là thời gian có đơn vị là h; s...

- Khi vật chuyển động trên dòng nước ta có:

$$V_{\text{xuoi}} = V_{\text{thuc}} + V_{\text{nuoc}}$$

$$V_{\text{nguc}} = V_{\text{thuc}} - V_{\text{nuoc}}$$

Ví dụ 1: Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một khoảng thời gian nhất định. Nếu xe chạy mỗi giờ nhanh hơn 10km thì đến sớm hơn dự định 3h. Nếu mỗi giờ xe chạy chậm hơn dự định 10km thì đến nơi chậm mất 5h. Tính vận tốc xe lúc đầu và thời gian dự định đi trên quãng đường AB.

Lời giải:

Gọi vận tốc dự định của ô tô là x (km/h) ($x > 10$)

Gọi thời gian dự định của ô tô là y (h) ($y > 3$)

Quãng đường AB là: $S = xy$ (km) (1)

Nếu mỗi giờ ô tô tăng vận tốc 10 km/h thì vận tốc lúc đó là $x + 10$ (km/h)

Vì ô tô đến sớm hơn 3h nên thời gian đi hết quãng đường AB là $y - 3$ (h)

Quãng đường AB là: $S = (x + 10)(y - 3)$ (km) (2)

Từ (1) và (2) ta có phương trình:

$$xy = (x + 10)(y - 3)$$

$$\Leftrightarrow xy = xy - 3x + 10y - 30$$

$$\Leftrightarrow 3x - 10y = -30 \quad (*)$$

Nếu mỗi giờ ô tô giảm vận tốc đi 10 km/h thì vận tốc lúc đó là $x - 10$ (km/h)

Vì ô tô đến muộn hơn 5h nên thời gian đi hết quãng đường AB là $y + 5$ (h)

Quang đường AB là: $(x - 10)(y + 5)$ (km) (3)

Từ (1) và (3) ta có phương trình:

$$xy = (x - 10)(y + 5)$$

$$\Leftrightarrow xy = xy + 5x - 10y - 50$$

$$\Leftrightarrow 5x - 10y = 50 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 10y = -30 & (4) \\ 5x - 10y = 50 & (5) \end{cases}$$

Lấy (5) - (4) ta được:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5x - 10y) - (3x - 10y) = 50 + 30 \\ 3x - 10y = -30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 10y - 3x + 10y = 80 \\ 3x - 10y = -30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 80 \\ 3x - 10y = -30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 80 : 2 \\ 3x - 10y = -30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ 3 \cdot 40 - 10y = -30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ 10y = 120 + 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ 10y = 150 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 15 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vận vận tốc dự định của ô tô là 40 km/h và thời gian dự định của ô tô đi hết quãng đường AB là 15h.

Ví dụ 2: Một ca nô chạy trên một dòng sông trong 7h, biết chạy xuôi dòng là 108km và ngược dòng là 63km. Một lần khác ca nô cũng chạy trong 7h nhưng chạy xuôi dòng là 81km và chạy ngược dòng là 84km. Tính vận tốc nước chảy và vận tốc thực của ca nô.

Lời giải:

Gọi vận tốc thực của ca nô là x (km/h); vận tốc của nước là y (km/h) ($x > y > 0$)

Vận tốc xuôi dòng của ca nô là $x + y$ (km/h)

Vận tốc ngược dòng của ca nô là $x - y$ (km/h).

Thời gian xuôi dòng 108km của ca nô là $\frac{108}{x + y}$ (h)

Thời gian ngược dòng 63km của ca nô là $\frac{63}{x - y}$ (h)

Vì tổng thời gian xuôi dòng và ngược dòng lần thứ nhất là 7h nên ta có phương trình:

$$\frac{108}{x+y} + \frac{63}{x-y} = 7 \quad (1)$$

Thời gian xuôi dòng 81km của ca nô là $\frac{81}{x+y}$ (h)

Thời gian ngược dòng 84km của ca nô là $\frac{84}{x-y}$ (h)

Vì tổng thời gian xuôi dòng và ngược dòng lần thứ 2 là 7h nên ta có phương trình:

$$\frac{81}{x+y} + \frac{84}{x-y} = 7 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{108}{x+y} + \frac{63}{x-y} = 7 \\ \frac{81}{x+y} + \frac{84}{x-y} = 7 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \frac{1}{x+y} = a \\ \frac{1}{x-y} = b \end{cases}$$

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 108a + 63b = 7 & (3) \\ 81a + 84b = 7 & (4) \end{cases}$$

Nhân cả hai vế phương trình (3) với 3 và phương trình (4) với 4 ta được:

$$\begin{cases} 324a + 189b = 21 & (5) \\ 324a + 336b = 28 & (6) \end{cases}$$

Lấy (6) – (5) ta được:

$$\begin{cases} (324a + 336b) - (324a + 189b) = 28 - 21 \\ 324a + 189b = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 324a + 336b - 324a - 189b = 7 \\ 324a + 189b = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 147b = 7 \\ 324a + 189b = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{21 - 189b}{324} \\ b = \frac{1}{21} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{21 - 189 \cdot \frac{1}{21}}{324} \\ b = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{27} \\ b = \frac{1}{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{27} \\ \frac{1}{x-y} = \frac{1}{21} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 27 + 21 \\ y = 27 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 48 \\ y = 27 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 27 - 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vận tốc thực của ca nô là 24 km/h và vận tốc dòng nước là 3 km/h.

Dạng 2: Bài toán công việc làm chung làm riêng

Phương pháp giải: Khi giải một bài toán làm chung làm riêng công việc ta cần chú ý đến một số đại lượng sau:

- Có ba đại lượng tham gia bài toán là:

+ Toàn bộ công việc.

+ Phần công việc làm được trong một đơn vị thời gian.

+ Thời gian hoàn thành một phần công việc hoặc toàn bộ công việc.

- Nếu một đội (một người,...) làm xong công việc trong x ngày thì mỗi ngày đội đó làm được $\frac{1}{x}$ (công việc), làm a ngày thì được $\frac{a}{x}$ (công việc).

- Ta thường coi toàn bộ công việc là 1.

Ví dụ 1: Hai bạn An và Khoa cùng làm chung một công việc sau 6 giờ thì xong. Biết nếu làm một mình xong công việc thì Khoa làm lâu hơn An 9 giờ. Tính thời gian làm một mình xong công việc của An, Khoa.

Lời giải:

Gọi thời gian An làm một mình xong công việc là x (h); thời gian Khoa làm một mình xong công việc là y (h) ($y > x > 9$)

Vì Khoa làm một mình xong công việc lâu hơn An là 9h nên ta có phương trình

$$y - x = 9 \quad (1)$$

1h An làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

1h Khoa làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Vì cả hai bạn cùng làm thì sau 6 giờ xong công việc nên ta có phương trình:

$$6 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1 \\ y - x = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1 \\ y = x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{6}{x+9} = 1 \\ y = x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6(x+9) + 6x}{x(x+9)} = 1 \\ y = x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6x + 54 + 6x}{x(x+9)} = 1 \\ y = x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 54 = x^2 + 9x \\ y = x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 9x - 12x - 54 = 0 \\ y = x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 54 = 0 \\ y = x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 6x - 54 = 0 \\ y = x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-9) + 6(x-9) = 0 \\ y = x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-9)(x+6) = 0 \\ y = x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 9 = 0 \\ x + 6 = 0 \\ y = x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \text{ (tm)} \\ x = -6 \text{ (ktm)} \\ y = x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 18 \end{cases}$$

Vậy An làm một mình thì 9h xong công việc; Khoa làm một mình thì 18h xong công việc.

Ví dụ 2: Hai vòi nước cùng chảy vào bể thì sau 4 giờ 48 phút đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 4 giờ vòi hai chảy trong 3 giờ thì được 75% bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Lời giải:

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là x (h); vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là y (h) ($x; y > 0$).

Một giờ vòi thứ nhất sẽ chảy được $\frac{1}{x}$ (bể)

Một giờ vòi thứ hai sẽ chảy được $\frac{1}{y}$ (bể)

Đổi 4h 48' = 4,8h

75% = $\frac{3}{4}$ h

Vì hai vòi chảy trong 4,8h thì đầy bể nên ta có phương trình:

$$4,8 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4,8}{x} + \frac{4,8}{y} = 1 \quad (1)$$

Vòi thứ nhất chảy trong 4h; vòi thứ hai chảy trong 3h thì được $\frac{3}{4}$ (bể) nên ta có phương trình:

$$\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{4} \quad (2)$$

Thừ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{4,8}{x} + \frac{4,8}{y} = 1 \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \frac{1}{x} = a \\ \frac{1}{y} = b \end{cases} \text{ khi đó hệ trở thành } \begin{cases} 4,8a + 4,8b = 1 \\ 4a + 3b = 0,75 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4,8a + 4,8b = 1 \\ 4a = 0,75 - 3b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4,8a + 4,8b = 1 \\ a = \frac{0,75 - 3b}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{0,75 - 3b}{4} \\ 4,8 \cdot \frac{0,75 - 3b}{4} + 4,8b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{0,75 - 3b}{4} \\ 1,2 \cdot (0,75 - 3b) + 4,8b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{0,75 - 3b}{4} \\ 0,9 - 3,6b + 4,8b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{0,75 - 3b}{4} \\ 1,2b = 1 - 0,9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{0,75 - 3b}{4} \\ 1,2b = 0,1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{0,75 - 3b}{4} \\ b = 0,1 : 1,2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{0,75 - 3b}{4} \\ b = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{0,75 - 3 \cdot \frac{1}{12}}{4} \\ b = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 12 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy vòi thứ nhất chảy một mình thì sau 8h sẽ đầy bể; vòi thứ hai chảy một mình thì sau 12h sẽ đầy bể.

Dạng 3: Bài toán về quan hệ các số

Phương pháp giải: Ta sử dụng một số kiến thức sau đây:

- Biểu diễn số có hai chữ số $\overline{ab} = 10a + b$ trong đó a là chữ số hàng chục và b là chữ số hàng đơn vị và $0 < a \leq 9; 0 \leq b \leq 9 (a, b \in \mathbb{N})$.

- Biểu diễn số có ba chữ số $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, trong đó a là chữ số hàng trăm b là chữ số hàng chục; c là chữ số hàng đơn vị và $0 < a \leq 9; 0 \leq b \leq 9; 0 \leq c \leq 9 (a, b, c \in \mathbb{N})$.

Ví dụ 1: Cho một số có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số đó thì được số mới lớn hơn số đã cho 63 đơn vị. Biết tổng của số ban đầu và số mới tạo thành là 99. Tìm số ban đầu.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là $\overline{ab} = 10a + b$ với $0 < a \leq 9; 0 \leq b \leq 9; a, b \in \mathbb{N}$.

Nếu đổi chỗ hai chữ số của số ban đầu cho nhau ta được số mới là $\overline{ba} = 10b + a$.

Vì số mới lớn hơn số ban đầu 63 đơn vị nên ta có phương trình:

$$\overline{ba} - \overline{ab} = 63$$

$$\Leftrightarrow (10b + a) - (10a + b) = 63$$

$$\Leftrightarrow 10b + a - 10a - b = 63$$

$$\Leftrightarrow -9a + 9b = 63$$

$$\Leftrightarrow -a + b = 7 \quad (1)$$

Vì tổng hai số ban đầu và số mới tạo thành là 99 nên ta có phương trình:

$$\overline{ba} + \overline{ab} = 99$$

$$\Leftrightarrow (10b + a) + (10a + b) = 99$$

$$\Leftrightarrow 10b + a + 10a + b = 99$$

$$\Leftrightarrow 11a + 11b = 99$$

$$\Leftrightarrow a + b = 9 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -a + b = 7 \\ a + b = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 7 \\ (-a + b) + (a + b) = 9 + 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 7 \\ -a + b + a + b = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 7 \\ 2b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 7 \\ b = 16 : 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 7 \\ b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 8 = 7 \\ b = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 8 \end{cases}$$

Vậy số ban đầu là 18.

Ví dụ 2: Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết chữ số hàng chục hơn chữ số hàng đơn vị hai đơn vị là 2, nếu viết xen giữa chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số đó tăng thêm 630 đơn vị.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là \overline{ab} ($2 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9; a, b \in \mathbb{N}$)

Ta có:

$$\overline{ab} = 10a + b$$

Vì chữ số hàng chục hơn chữ số hàng đơn vị hai đơn vị nên ta có phương trình $a - b = 2$.

Nếu viết xen giữa chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì ta được số mới là $\overline{a0b}$

Ta có:

$$\overline{a0b} = 100a + b$$

Vì số mới lớn hơn số cũ 630 đơn vị nên ta có:

$$\overline{a0b} - \overline{ab} = (100a + b) - (10a + b) = 630$$

$$\Leftrightarrow 100a + b - 10a - b = 630$$

$$\Leftrightarrow 90a = 630$$

$$\Leftrightarrow a = 630 : 90$$

$$\Leftrightarrow a = 7 \text{ mà } a - b = 2$$

$$\Rightarrow b = 5$$

Vậy số có hai chữ số cần tìm là 75.

Dạng 4: Bài toán về hình học.

Phương pháp giải: Sử dụng đến công thức tính chu vi, diện tích các hình như hình vuông; hình chữ nhật; hình thang;...

Ví dụ 1: Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 60m. Nếu tăng chiều dài lên 4 lần và chiều rộng lên 3 lần thì chu vi khu vườn sẽ tăng 162m. Tìm diện tích khi vườn.

Lời giải:

Gọi chiều dài của khu vườn là x (m); chiều rộng của khu vườn là y (m) ($x > y > 0$)

Vì chu vi khu vườn là 60m nên ta có phương trình:

$$2.(x + y) = 60$$

$$\Leftrightarrow x + y = 60 : 2$$

$$\Leftrightarrow x + y = 30 \quad (1)$$

Nếu tăng chiều dài lên 4 lần thì chiều dài mới là $4x$ (m); nếu tăng chiều rộng lên 3 lần thì chiều rộng mới là $3y$ (m).

Chu vi khu vườn mới là: $2(4x + 3y) = 8x + 6y$ (m)

Vì chu vi khu vườn mới hơn chu vi khu vườn cũ 162m nên ta có phương trình:

$$(8x + 6y) - 2(x + y) = 162$$

$$\Leftrightarrow 8x + 6y - 2x - 2y = 162$$

$$\Leftrightarrow 6x + 4y = 162 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 6x + 4y = 162 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 - y \\ 6(30 - y) + 4y = 162 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 - y \\ 180 - 6y + 4y = 162 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 - y \\ -2y = 162 - 180 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 - y \\ -2y = -18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 - y \\ y = (-18) : (-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 - y \\ y = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 - 9 \\ y = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 9 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Diện tích khu vườn ban đầu là:

$$S = 21 \cdot 9 = 189 \text{ m}^2$$

Ví dụ 2: Một tam giác có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ cạnh đáy. Nếu chiều cao tăng thêm

3dm và cạnh đáy giảm đi 3dm thì diện tích của nó tăng thêm 12 dm^2 . Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác.

Lời giải:

Gọi chiều cao của tam giác là x (dm); cạnh đáy của tam giác là y (dm) ($0 < x < y$)

Vì chiều cao của tam giác bằng $\frac{3}{4}$ cạnh đáy nên ta có:

$$x = \frac{3}{4}y \quad (1)$$

Diện tích tam giác đó là

$$S = \frac{1}{2}.x.y \text{ (dm}^2\text{)}$$

Nếu chiều cao tam giác tăng thêm 3dm thì chiều cao mới của tam giác là $x + 3$ (dm)

Nếu cạnh đáy tam giác giảm đi 3dm thì cạnh đáy mới của tam giác là $y - 3$ (dm).

Diện tích tam giác mới là

$$S = \frac{1}{2}.(x + 3).(y - 3) = \frac{1}{2}xy - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{9}{2} \text{ (dm}^2\text{)}$$

Vì diện tích mới hơn diện tích cũ 12 dm^2 nên ta có phương trình

$$\left(\frac{1}{2}xy - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{9}{2} \right) - \frac{1}{2}xy = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}xy - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{9}{2} - \frac{1}{2}xy = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{9}{2} = 12$$

$$\Leftrightarrow -3x + 3y - 9 = 12.2$$

$$\Leftrightarrow -3x + 3y = 24 + 9$$

$$\Leftrightarrow -3x + 3y = 33$$

$$\Leftrightarrow -x + y = 11 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -x + y = 11 \\ x = \frac{3}{4}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4}y \\ -\frac{3}{4}y + y = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4}y \\ \frac{1}{4}y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4}y \\ y = 11 \cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4}y \\ y = 44 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \cdot 44 \\ y = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 33 \\ y = 44 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy chiều cao của tam giác là 33dm; cạnh đáy của tam giác là 44dm.

Dạng 5: Bài toán thực tế

Phương pháp giải:

- Với bài toán về năng suất lao động ta chú ý đến ba đại lượng:

Tổng sản phẩm; số sản phẩm làm trong một đơn vị thời gian; thời gian làm sản phẩm, khi đó ta có công thức liên hệ ba đại lượng trên như sau:

Tổng sản phẩm = thời gian . số sản phẩm làm được trong một đơn vị thời gian.

- Với bài toán liên quan đến tỉ số phần trăm ta chú ý đến các đại lượng sau.

Tổng sản phẩm, phần trăm vượt mức khi đó ta có công thức liên hệ giữa hai đại lượng trên là:

Tổng sản phẩm = $(100 + a)\% \cdot x$ với x là số sản phẩm dự định ban đầu, a là phần trăm vượt mức.

Ví dụ 1: Một công ty dự định sản xuất một 1000 hộp khẩu trang so với quy định. Tuy nhiên do dịch bệnh Covid – 19 bùng phát nên công ty đã đẩy nhanh tiến độ mỗi ngày 10 hộp khẩu trang để kịp phục vụ thị trường do vậy công ty đã hoàn thành sớm hơn kế hoạch 5 ngày. Hỏi theo kế hoạch ban đầu công ty dự kiến sản xuất trong bao nhiêu ngày.

Lời giải:

Gọi thời gian công ty dự định sản xuất khẩu trang là x (ngày) ($x > 5$)

Gọi năng suất làm việc ban đầu của công ty là y (sản phẩm / ngày) ($y > 0; y \in \mathbb{N}^*$)

Vì ban đầu công ty dự định sản xuất 1000 hộp khẩu trang nên ta có phương trình:
 $xy = 1000$ (1)

Vì hoàn thành sớm hơn 5 ngày nên thời gian thực tế công ty sản xuất là $x - 5$ (ngày)

Vì mỗi ngày công ty làm thêm 10 hộp khẩu trang nên năng suất thực tế của công ty là $y + 10$ (sản phẩm / ngày)

Ta có phương trình: $1000 = (x - 5)(y + 10)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy = 1000 \\ (x - 5)(y + 10) = 1000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1000 \\ xy + 10x - 5y - 50 = 1000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1000 \\ 1000 + 10x - 5y - 50 = 1000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1000 \\ 10x - 5y = 1000 - 1000 + 50 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1000 \\ 10x - 5y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1000 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1000 \\ y = 2x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x - 10) = 1000 \\ y = 2x - 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 10x - 1000 = 0 \\ y = 2x - 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 10x - 1000 = 0 \\ y = 2x - 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x - 25) + 40(x - 25) = 0 \\ y = 2x - 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 25)(2x + 40) = 0 \\ y = 2x - 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - 25 = 0 \\ 2x + 40 = 0 \\ y = 2x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \quad (\text{tm}) \\ x = -20 \quad (\text{ktm}) \\ y = 2x - 10 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 2 \cdot 25 - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 40 \end{cases} \quad (\text{tm})$$

Vậy thời gian công ty dự định sản xuất khẩu trang là 25 ngày.

Ví dụ 2: Hai xí nghiệp tổng cộng phải làm 360 dụng cụ. Trên thực tế xí nghiệp I vượt mức 12%, xí nghiệp II vượt mức 10% nên tổng dụng cụ làm được là 400 dụng cụ. Tính số dụng cụ mỗi xí nghiệp phải làm so với dự định.

Lời giải:

Gọi số dụng cụ xí nghiệp I phải làm là x (dụng cụ) ($x > 0; x \in \mathbb{N}^*$)

Gọi số dụng cụ xí nghiệp II phải làm là y (dụng cụ) ($y > 0; y \in \mathbb{N}^*$).

Vì ban đầu cả hai xí nghiệp phải làm 360 dụng cụ nên ta có phương trình:

$$x + y = 360 \quad (1)$$

Vì xí nghiệp I vượt mức 12% nên số dụng cụ thực tế xí nghiệp I làm được là: $(100 + 12)\%x = 112\%x = 1,12x$

Vì xí nghiệp II vượt mức 10% nên số dụng cụ thực tế xí nghiệp II làm được là: $(100 + 10)\%y = 110\%y = 1,1y$.

Thực tế cả hai xí nghiệp đã làm được 400 dụng cụ nên ta có phương trình:

$$1,12x + 1,1y = 400 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 360 \\ 1,12x + 1,1y = 400 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 360 - y \\ 1,12(360 - y) + 1,1y = 400 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 360 - y \\ 403,2 - 1,12y + 1,1y = 400 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 360 - y \\ -1,12y + 1,1y = 400 - 403,2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 360 - y \\ -0,02y = -3,2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 360 - y \\ y = (-3,2) : (-0,02) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 360 - y \\ y = 160 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 360 - 160 \\ y = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 160 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số dụng cụ xí nghiệp I cần làm theo kế hoạch là 200 dụng cụ; số dụng cụ xí nghiệp II cần làm theo kế hoạch là 160 dụng cụ.

III. Bài tập vận dụng

Bài 1: Một tàu thủy xuôi dòng trên một khúc sông từ bến A đến bến B dài 160km. Sau đó ngược dòng trên khúc sông đó về điểm C cách B 144km. Thời gian tàu xuôi dòng ít hơn thời gian tàu ngược dòng là 30 phút. Tính vận tốc riêng của tàu và vận tốc dòng nước.

Bài 2: Hai tổ công nhân cùng may khẩu trang cho vùng có dịch Covid – 19. Nếu cả hai tổ cùng làm thì sau 12h sẽ xong. Họ làm chung với nhau 4h thì tổ thứ nhất bị

điều đi làm việc khác, tổ thứ hai tiếp tục làm trong 10h thì xong công việc. Hỏi mỗi tổ làm một mình thì bao lâu sẽ xong công việc.

Bài 3: Một tổ theo kế hoạch phải sản xuất 75 thùng khẩu trang trong một số ngày dự định. Trong thực tế, do cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm vượt mức 5 thùng vì vậy họ đã làm được 80 thùng và hoàn thành trước kế hoạch 1 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày tổ phải làm bao nhiêu thùng khẩu trang.

Bài 4: Một công nhân dự định làm 70 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng thực tế xí nghiệp đó đã giao cho công nhân phải làm 84 sản phẩm. Mặc dù mỗi giờ người đó đã làm thêm được 1 sản phẩm nhưng vẫn hoàn thành chậm hơn kế hoạch 35 phút. Hỏi theo dự định lúc đầu, trung bình mỗi giờ người đó phải làm bao nhiêu sản phẩm. Biết mỗi giờ người đó làm không quá 10 sản phẩm.

Bài 5: Một ô tô dự định đi quãng đường AB với vận tốc không đổi. Khi đi được một nửa quãng đường, ô tô dừng lại vì bị chặn bởi tàu hỏa mất 3 phút. Vì vậy, để đến B đúng thời gian quy định ô tô phải tăng vận tốc thêm 2km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc dự định của ô tô.

Bài 6: Một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc không đổi, hai địa điểm cách nhau 30km. Khi từ B về A người đó chọn đường khác dễ đi hơn nhưng dài hơn con đường cũ 6km. Vì vậy lúc về người đó đi với vận tốc lớn hơn lúc đi là 3km/h. Nên thời gian về vẫn ít hơn thời gian đi 3km. Tính vận tốc ban đầu của người đó.

Bài 7: Hai người thợ cùng xây một bức tường trong 3h 45 phút thì xong. Nhưng sau khi làm chung được 3h thì người thứ nhất được điều đi làm việc khác, người thứ 2 làm tiếp chung 2h nữa thì xong. Hỏi làm một mình thì mỗi người cần bao nhiêu thời gian để xong công việc.

Bài 8: Một ca nô đi tuần tra hết 5h với quãng đường xuôi dòng là 96km và ngược dòng là 48km. Một lần khác, ca nô đi xuôi dòng hết 48km và ngược dòng hết 60km trong 4h. Tính vận tốc riêng của nước và vận tốc riêng của ca nô.

Bài 9: Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi là 36m. Biết nếu giảm chiều rộng đi 3m và tăng chiều dài lên 10m thì diện tích hình chữ nhật tăng thêm 100 m^2 . Tính chiều dài chiều rộng hình chữ nhật.

Bài 10: Theo kế hoạch hai tổ cần sản xuất 330 sản phẩm. Nhưng khi thực hiện, tổ I làm vượt mức 10% và tổ II làm giảm mức 15% so với mức kế hoạch nên hai tổ làm được 318 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ dự định làm.

Bài 11: Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục là 3 đơn vị. Nếu viết thêm chữ số 1 vào giữa chữ số hàng chục và hàng đơn vị ta được số mới tăng thêm 460 đơn vị.

Bài 12: Một chữ số có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số đã cho thì được một số mới nhỏ hơn số cũ là 18 đơn vị. Biết tổng của số đã cho và số mới là 176. Tìm số đó.

Bài 13: Nếu tăng chiều dài của hình chữ nhật thêm 2m và giảm chiều rộng của hình chữ nhật đi 3m thì diện tích hình chữ nhật tăng 100 m^2 . Nếu cùng giảm chiều dài và chiều rộng đi 2m thì diện tích hình chữ nhật giảm đi 68 m^2 . Tìm chiều dài chiều rộng của hình chữ nhật đó.

Bài 14: Hai tổ dự định sản xuất được 900 chi tiết máy. Nhưng khi làm việc, tổ I đã vượt mức 10% và tổ II vượt mức 15% so với dự định nên cả hai tổ đã làm được 1010 chi tiết máy. Tính số chi tiết máy mỗi tổ dự định làm.