

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 (120 phút)
MÔN THI: TOÁN

câu 1 (2 điểm):

a/. Giải phương trình sau: $\sqrt{\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1} - \frac{3}{2}$

b/. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz = 100$. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 10} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{10\sqrt{z}}{\sqrt{xz} + 10\sqrt{z} + 10}.$$

câu 2 (2 điểm):

a/. Chứng minh rằng nếu các số x, y, z có tổng là một số không âm thì: $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$.

b/. Cho ba số x, y, z thỏa mãn:
$$\begin{cases} x + y + z = 2011 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2011} \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức: $P = (x^{2007} + y^{2007})(y^{2009} + z^{2009})(z^{2011} + x^{2011})$

câu 3 (1 điểm): Cho a, b, c là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{4a}{a+b+2c} + \frac{b+3c}{2a+b+c} - \frac{8c}{a+b+3c}.$$

Câu 4 (3 điểm): Cho hình vuông ABCD độ dài cạnh là a . E là điểm di động trên đoạn thẳng CD (E khác D), đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K. Gọi I là trung điểm của FK.

a/. Chứng minh I là tâm đường tròn đi qua các điểm A, C, F, K và I di chuyển trên đường thẳng cố định khi E di động trên CD.

b/. Đặt $DE = x$ ($0 < x \leq a$). Tính độ dài các cạnh của tam giác AEK theo a và x .

c/. Hãy chỉ ra vị trí của E sao cho độ dài đoạn thẳng EK ngắn nhất và tính độ dài đó.

Câu 5 (2 điểm):

a/. Chứng minh $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}$, $\forall x, y > 0$ thỏa mãn $xy \geq 1$.

b/. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{2} \leq a, b, c \leq 2$.

Chứng minh $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{22}{15}$.

Chúc các em thành công !